

NECELOČÍSELNÁ DIMENZE

Analýza nevšedních struktur z všedního života

Prezentace miniprojektu na Týden vědy 2017

Alžbeta Budinská, Kateřina Skybová

Praha

22.6.2017

Úvod

- Koncept neceločíselné dimenze
- Metoda box-counting

- Aplikace metody na obrázky fraktálů
- Aplikace metody na zvukové signály
- Fyzikální model – zvukový kanál

- Závěr, shrnutí

Neceločíselná dimenze

- Dimenze klasických objektů:
 - úsečka = n úseček o délce $1/n$
 - čtverec = n^2 čtverečků o straně $1/n$
 - krychle = n^3 krychliček o straně $1/n$
- Zobecnění pojmu dimenze:
 - Objekt $\approx n^D$ otevřených množin o průměru $1/n$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\substack{\text{možná} \\ \text{pokrytí}}} \frac{\log N}{\log n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{\substack{\text{možná} \\ \text{pokrytí}}} \frac{\log N}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

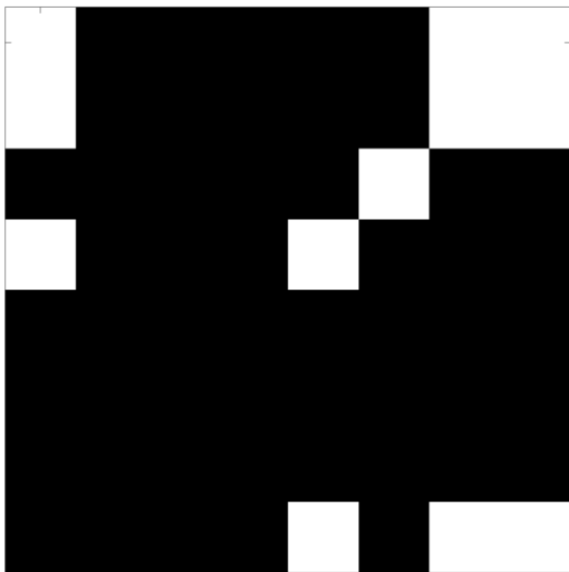
Box-counting metoda

- Obrázek pokryjeme sítí $n \times n$ čtverců
- Do každého čtverce vepíšeme 0, nebo 1 (pokrývá, nebo nepokrývá objekt)
- Sečteme hodnoty ve čtvercové síti $\rightarrow N_n$
- Získali jsme bod $[\log n, \log N_n]$
- Opakujeme pro různá (větší a větší) n
- Sadu bodů proložíme přímkou
- Sklon přímky je (hrubý) odhad dimenze

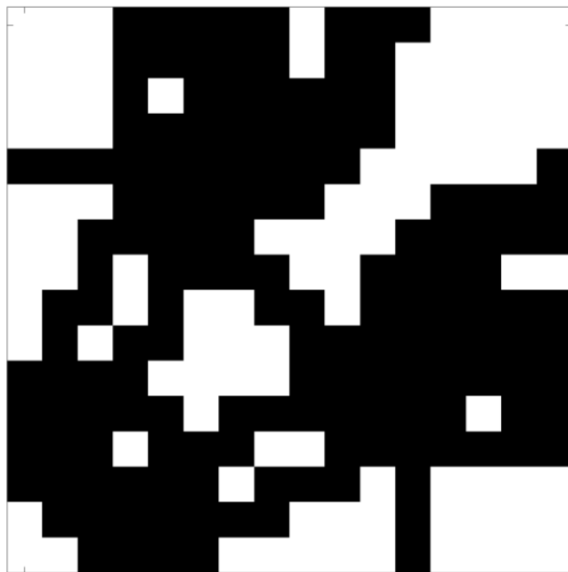
Box-counting metoda

[1]

size/box size =8



size/box size =16



size/box size =32



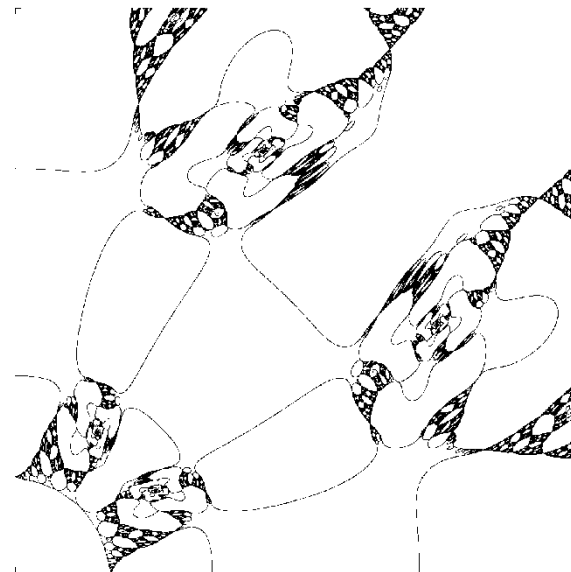
size/box size =60



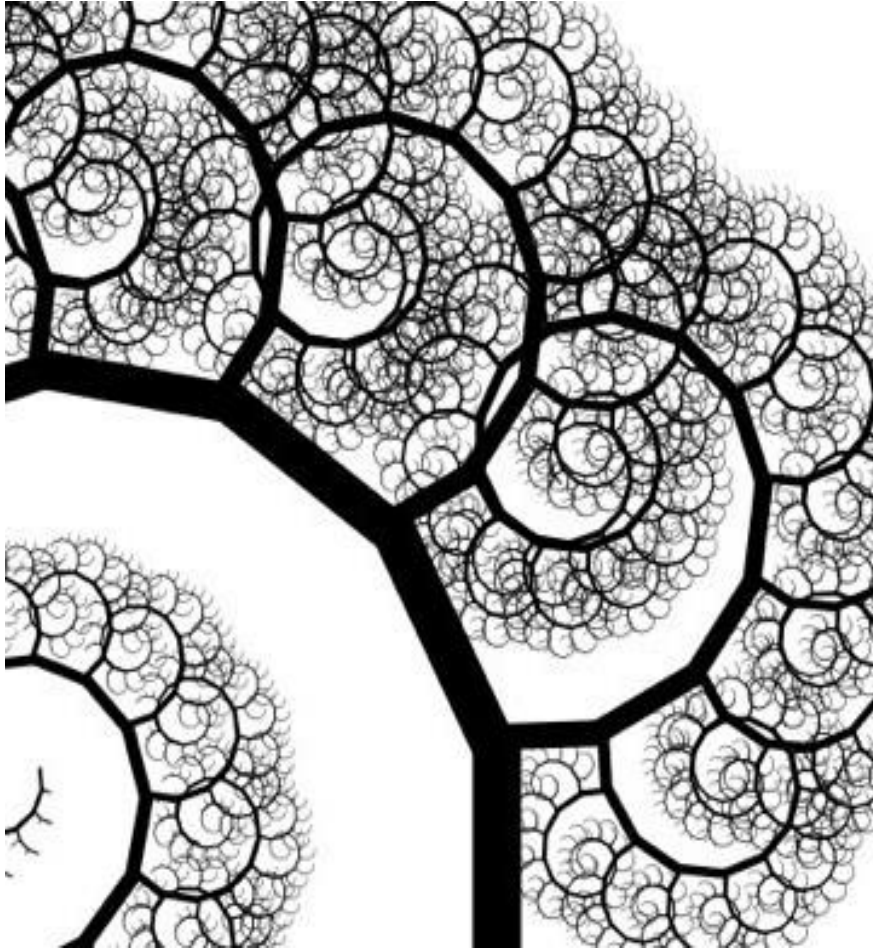
size/box size =252



size/box size =1008



Obrázky fraktálů



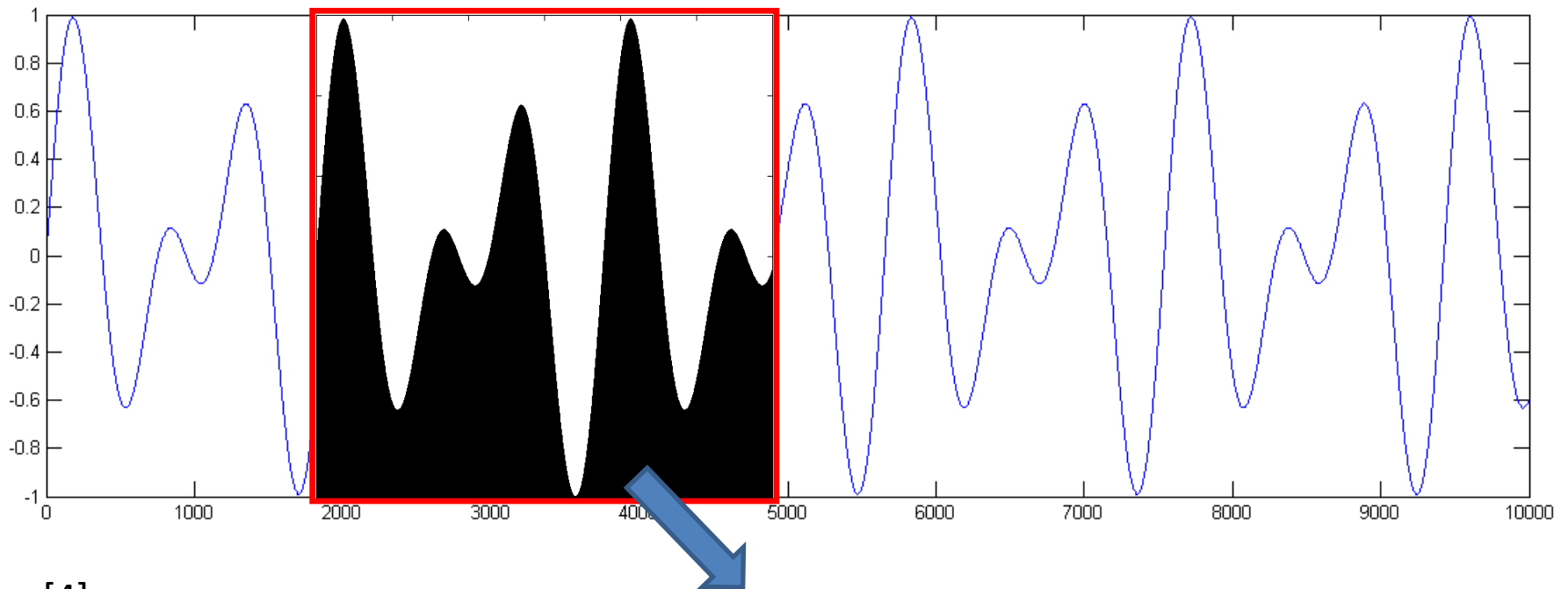
[2] Model rostliny
 $D \approx 1,66$



[3] Model kapradí
 $D \approx 1,70$

Zvukový signál - metoda

- Zvukový signál převedeme po částech na obrázky

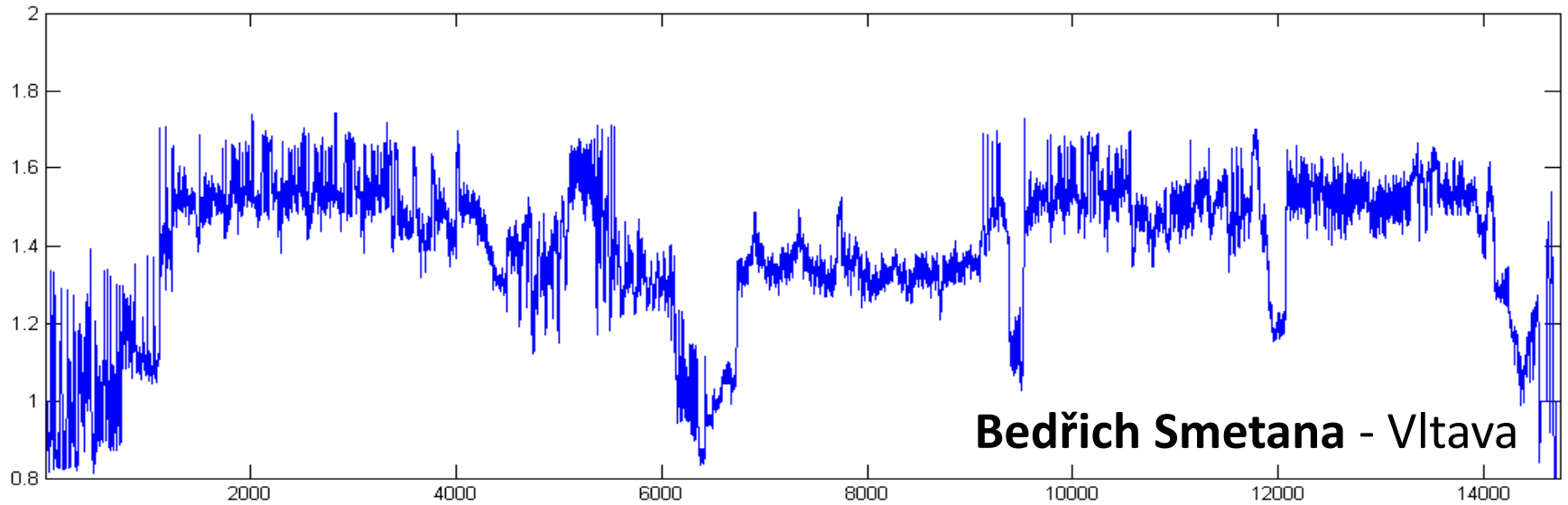


[4]

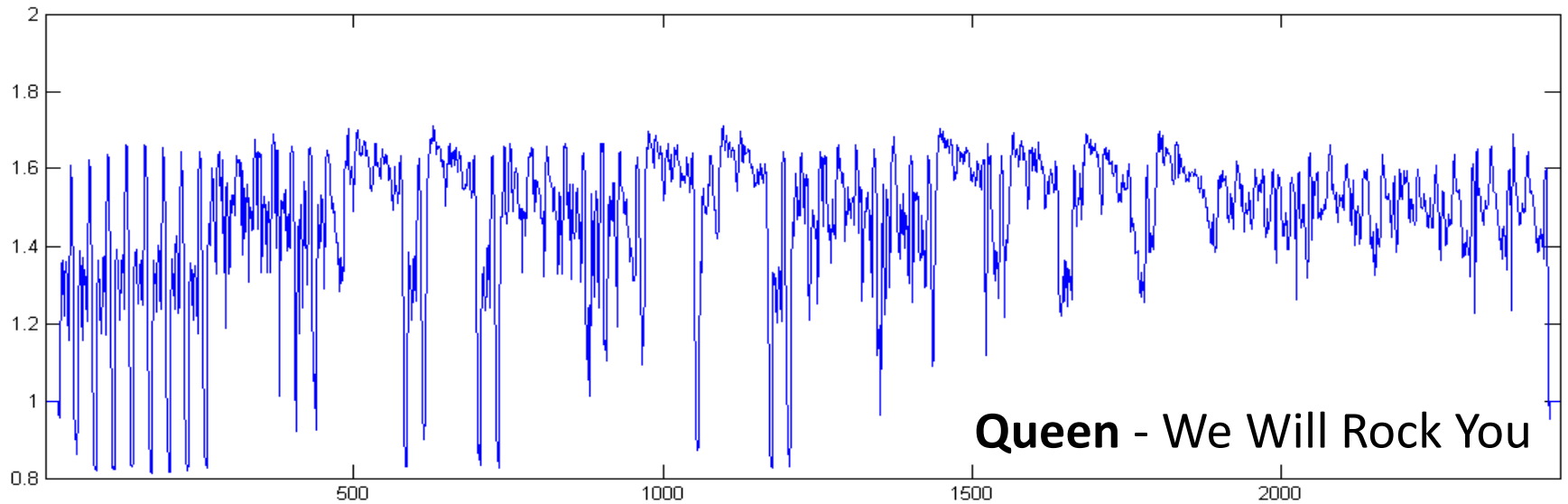
dimenze signálu v čase $t = D(t)$

Zvukový signál - výsledky

[5]



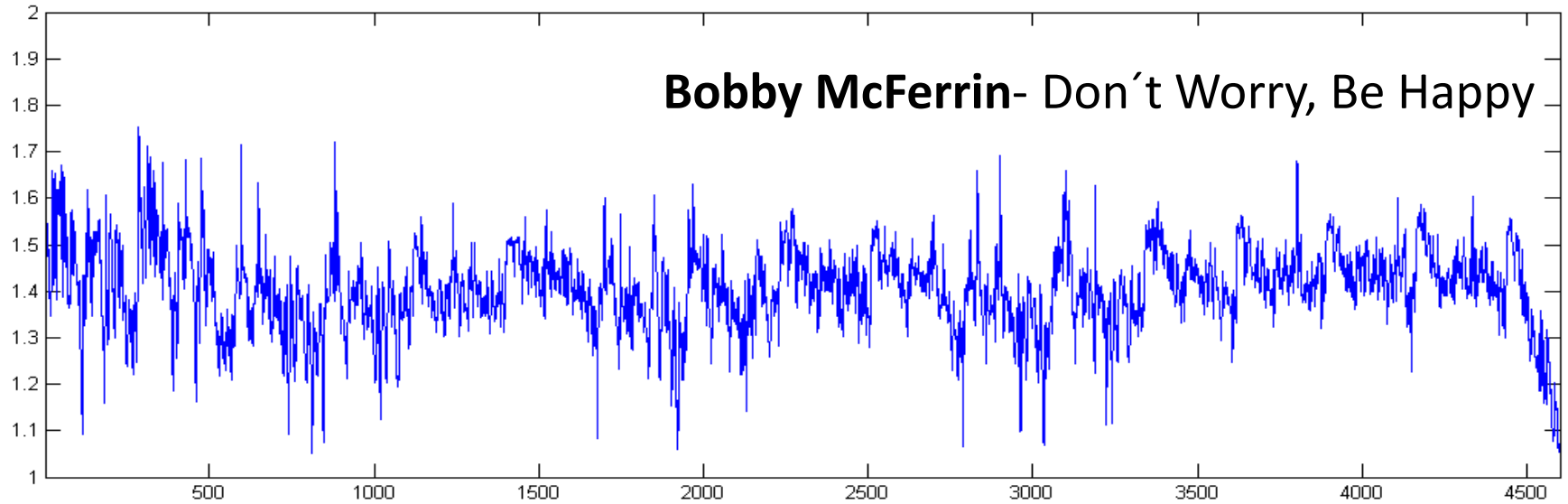
[6]



Zvukový signál - výsledky

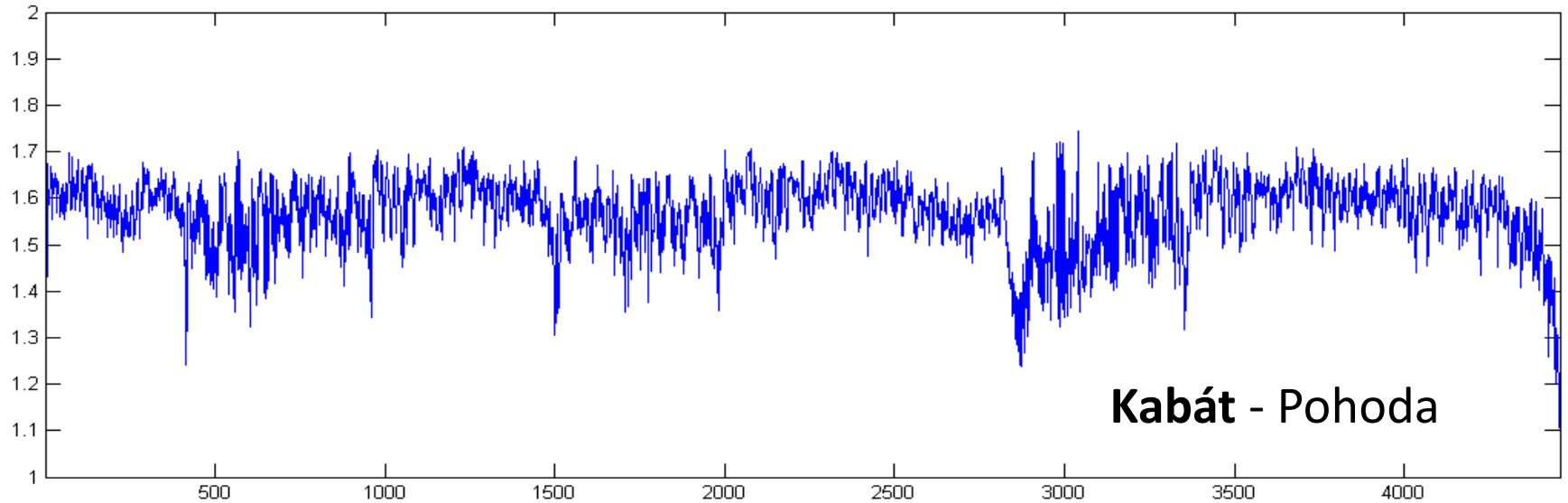
[7]

Bobby McFerrin- Don't Worry, Be Happy



[8]

Kabát - Pohoda



Fyzikální model – kanál se šumem

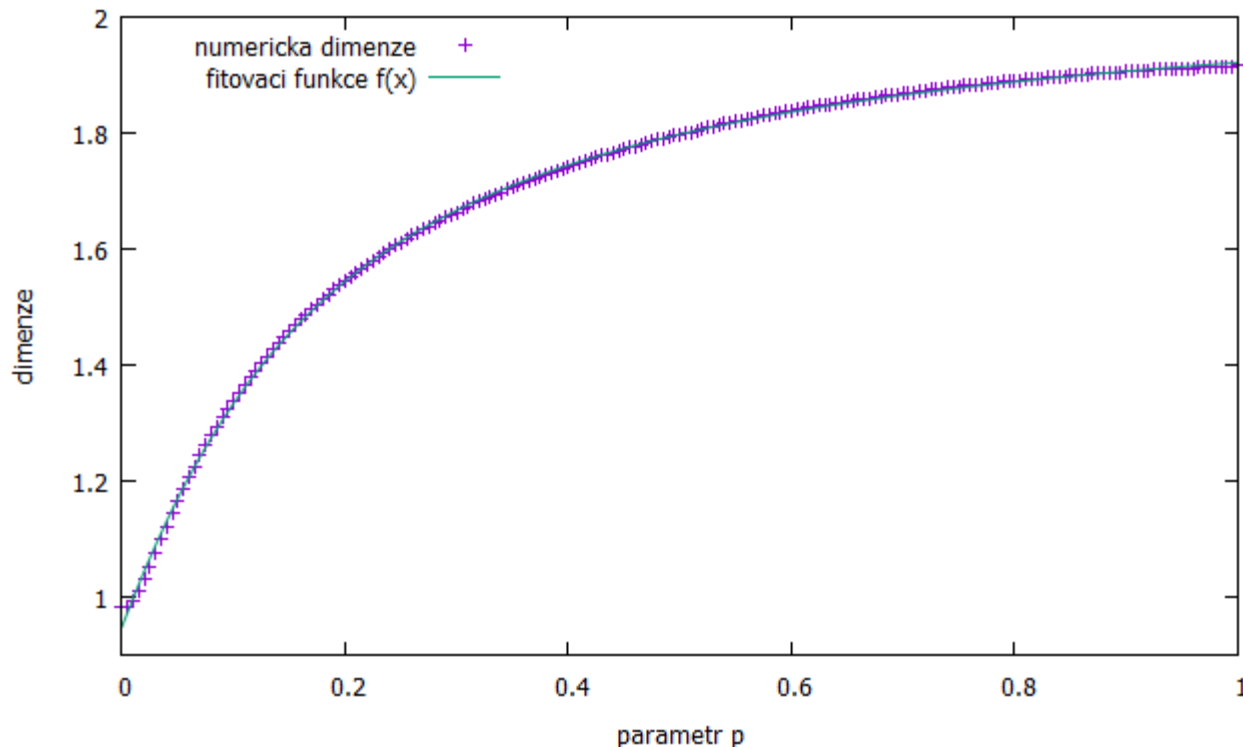
- přenos zvuku reálným kanálem zatížen šumem
- ideální šum $\leftrightarrow D=2$, ideální čistý tón $\leftrightarrow D=1$

$$\left. \begin{array}{l} \blacktriangleright \text{Zvuk} \approx \sin(x) \\ \blacktriangleright \text{Šum} \approx \text{rand}(x) \end{array} \right\} \text{Kanál} \approx (1-p) \sin(x) + p \text{rand}(x)$$

parametr $p \leftrightarrow$ kvalita kanálu – 0 pro ideálně dobrý
– 1 pro ideálně špatný

Fyzikální model – kanál se šumem

[9]



- dimenze roste s parametrem p jako $f(p)=A \arctan(Bp+C) + D$
- již malé příměsi šumu výrazně zvyšují dimenzi zvukové stopy
- ‚ideální šum‘ nebyl dosažen kvůli neoptimálnímu numerickému přístupu – dim. šumu zde vyšla $\approx 1,92$

Shrnutí

- Metoda box-counting: numerický odhad dimenze
- Obrázky: dimenze rostlinných motivů $\approx 1,5-1,7$
- Zvuky: dimenze čistých tónů (flétna) $\approx 1-1,2$
dimenze komplexních zvuků (lidský hlas,
el. kytara, triangl) $\approx 1,4-1,6$
dimenze hluku (potlesk, šum) $\approx 1,6-2$
- Model zvukového kanálu:
přítomnost šumu ovlivňuje dimenzi jako \arctan

Závěry

- kapradí a další objekty mají skutečně strukturu fraktálu – mají neceločíselnou dimenzi $2 > D > 1$
- dimenze zvukové stopy se v průběhu nahrávky mění podle použitých nástrojů a přítomnosti šumu, který ovlivňuje dimenzi $\approx \arctan$
- výsledky jsou jen přibližné, protože metoda box-counting dimenzi odhaduje; přesto dávají dobrou informaci o komplexnosti struktury

Děkujeme za pozornost!

Reference

- [1,4,9] výsledky programu MATLAB
- [2,3] Obrázky staženy z domén
<http://hrymodelyasituace.blogspot.cz/2010/12/fraktaly.html> ,
<http://matthewjamestaylor.com/blog/create-fractals-with-recursive-drawing> dne 16.5.2017
- [5,6,7,8] Hudební stopy Queen, McFerrin, Smetana, Kabát staženy z YouTube
- [10] Bouda M., Caplan J. S., Saiers J. E., Box-Counting Dimension Revisited: Presenting an Efficient Method of Minimizing Quantization Error and an Assessment of the Self-Similarity of Structural Root Systems, Front Plant Sci., 2016, 7 49
- [11] https://en.wikipedia.org/wiki/Box_counting
- [12] https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_dimension
- [13] <https://en.wikipedia.org/wiki/Grayscale>