Fraktální množiny a jejich zobrazení

D. Novák, V. Brabcová*, A. Blažek**
Gymnázium Veľká okružná Žilina
Střední průmyslová škola Ostrov*
Gymnázium Veľká okružná Žilina**
donnberg5@protonmail.ch
brabvl@ms.spsostrov.cz *
adamynos219@gmail.com **

Abstrakt

Cieľom našej práce bolo zoznámenie sa s fraktálnymi množinami. Základnou jedotkou fraktálnej množiny je fraktál. Fraktál je geometrický objekt, ktorý je sebepodobný; to je objekt, ktorý vyzerá rovnako pri akomkoľvek zväčšení. Zamerali sme sa na ich matematické vlastnosti a ich zobrazenie pomocou počítačových programov. Počítali sme dimenzie niektorých fraktálov, ako sú Cantorova množina, Kochova krivka, Sierpinského trojuholník a mnoho ďalších; zobrazovali sme Mandelbrotovu a Juliove množiny pomocou programovacieho prostredia JavaScript a aplikovali sme na ne niektoré farbiace algoritmy.

1 Úvod

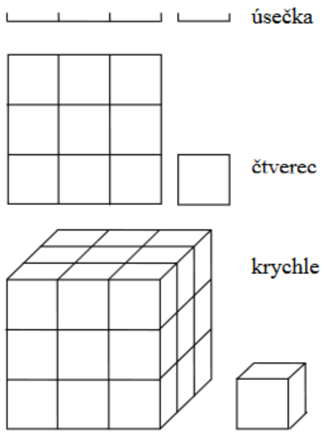
Fraktál je geometrický objekt, ktorého menšie časti sú podobné celku. Táto vlastnosť sa nazýva sebepodobnosť. Práve pomocou tejto vlastnosti rozoznávame fraktály nie len v matematike, ale aj v reálnom svete. Takto si môžeme všimnúť, že sebepodobné sú napríklad hory, lesy, lúky a kopce, stromy a rastliny (obr. 1).

2 Matematika fraktálov

Fraktálne dimenzie

Geometrickým objektom okrem ich topologickej dimenzie pripisujeme aj dimenziu fraktálnu. Fraktálna dimenzia umožňuje popísať stupeň zložitosti objektu podľa toho, ako rýchlo rastie jeho dĺžka, obsah a objem v závislosti na veľkosti meradla, podľa ktorého meriame [1]. Existuje niekoľko spôsobov na zisťovanie dimenzií fraktálov podľa štruktúry: sebepodobnostné dimenzie, mriežkové dimenzie alebo Hausdorffova dimenzia.

Pri zisťovaní dimenzií sme používali sebepodobnostné dimenzie:



Objekt	Počet částí	Faktor zmenšení
Úsečka	3 6 173	1/3 1/6 1/173
Čtverec	$9 = 3^2$ $36 = 6^2$ $29929 = 173^2$	1/3 1/6 1/173
Krychle	$27 = 3^3$ $216 = 6^3$ $5177717 = 173^3$	1/3 1/6 1/173
Kochova křivka	4 16 4^k	1/3 1/9 $1/3^k$

Obrázek 1: Sebepodobnostosť niektorých objektov

Z obrázku (obr. 1)[1] vyplýva, že medzi počtom častí N a faktorom zmenšenia s existuje vzťah $N = 1/s^D$, kde D je dimenzia objektu. Vyjadrením D získame rovnicu $D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{s}}$, ktorou vypočítame dimenziu objektu.

Výpočet dimenzií

Cantorova množina (obr. 3) vznikne rozdelením úsečky na 3 rovnaké časti a odstránením prostrednej časti. Tento proces sa opakuje donekonečna. Takto s faktorovým zmenšením s=1/3 vzniknú 2 časti N=2. Dosadením do vzorca pre výpočet dimenzie dostaneme vzťah

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}6309\,.$$

Kochova krivka (obr. 4) vzniká rozdelením úsečky na 3 rovnaké časti a nahradením prostrednej časti dvoma úsečkami, ktoré sú rovnako dlhé ako tretina úsečky a zvierajú uhol 60°. S faktorovým zmenšením s=1/3 vzniknú 4 časti N=4. Platí vzťah

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}2619\,.$$

Zaujímavým príkladom fraktálu je aj pravouhlá verzia Kochovej krivky (obr. 5). Tá je zložená z 8 častí, ktoré majú dĺžku rovnú jednej štvrtine z pôvodnej úsečky. To znamená, že s faktorovým zmenšením s=1/4 nám vznikne 8 častí N=8 [4]. Pre dimenziu objektu platí vzťah

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 4} = 1{,}5$$

3 Zobrazení fraktální množiny v komplexních číslech

Kromě klasických fraktálů, jako jsou například Cantorova a Kochova množina, existují fraktály v komplexní rovině. Kvůli složitosti výpočtů bylo možné objevit fraktální množiny v komplexních číslech až s nástupem výpočetní techniky. Jako příklad patří mezi tyto fraktály Mandelbrotova a Juliovy množiny. [2]

Mandelbrotova množina

Mandelbrotova množina je nelineární deterministický fraktál. Používá se například ke generování textur a trojrozměrných modelů krajin v počítačové grafice.

Bylo dokázáno, že její hranice má fraktální dimenzi 2 [3]. Je vytvořena pomocí iterace funkce komplexní paraboly podle vztahu:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c\,,$$

kde z_n je posloupnost komplexních čísel a c je počáteční komplexní číslo.

Juliovy množiny

Juliovy množiny jsou vytvořeny pomocí iterace funkce komplexní paraboly podle vztahu pro výpočet Mandelbrotovy množiny, kde z_n je posloupnost komplexních čísel a c je konstanta.

Je jich nekonečně mnoho. Dělí se na spojité a nespojité podle toho, zda konstantu zvolíme uvnitř nebo vně Mandelbrotovy množiny.

Počítačové zobrazení

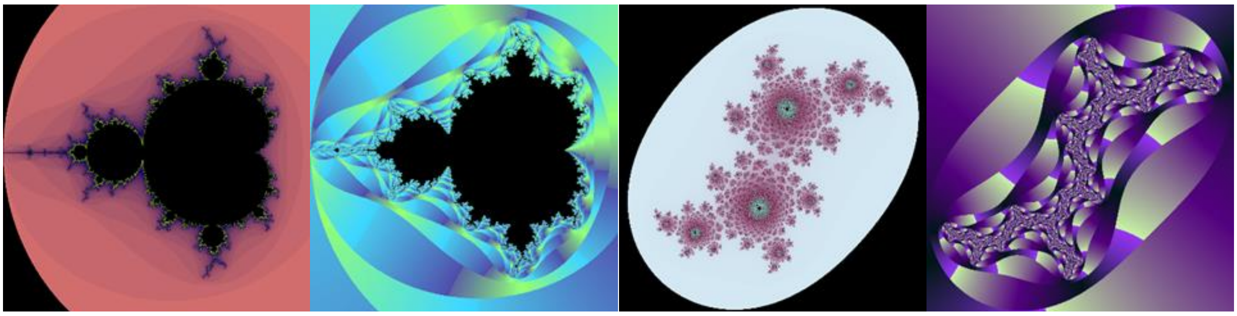
Pro počítačové zobrazování fraktálních množin se mohou použít různé metody a programovací jazyky. V našem případě pro zobrazení Mandelbrotovy a Juliových množin jsme použili jazyk JavaScript a komponentu Canvas.

Barvy jsme přiřadili podle počtu iterací a podle únikového úhlu.

Na snímku (obr. 1) vpravo je ukázka kódu pro zobrazení Mandelbrotovy množiny s obarvením podle počtu iterací. Pro zobrazení Juliových množin v kódu změníme proměnné `c1` a `c2` na předem danou konstantu a počáteční hodnotu posloupnosti vložíme do proměnných `xn` a `yn`.

Pro obarvení podle únikového úhlu je nutné změnit návratovou hodnotu funkce z počtu dosažených iterací na úhel posledního komplexního prvku posloupnosti za pomoci funkce `atan2`.

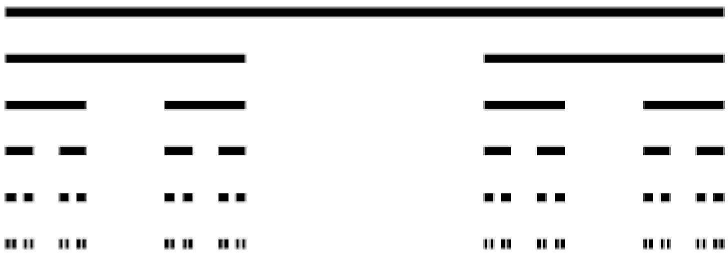
```
function testMandel(re, im) {
  var c1 = re;
  var c2 = im;
  var xn = 0;
  var yn = 0;
  var it = 0;
  var tmp = 0;

  while (it < maxIter) {
      tmp = xn * xn - yn * yn;
      yn = 2.0 * xn * yn + c2;
      xn = tmp + c1;
      if (xn * xn + yn * yn > 4.0) break;
      it++;
      }
  if (it == maxIter) it = 0;
  return it;
}
```



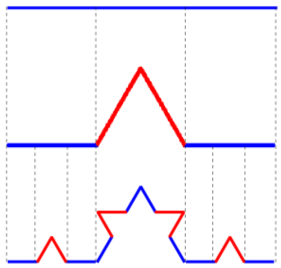
Obrázek 2: Zobrazení Mandelbrotovy a Juliových množin s obarvením podle iterace a únikového úhlu.

4 Zhrnutie

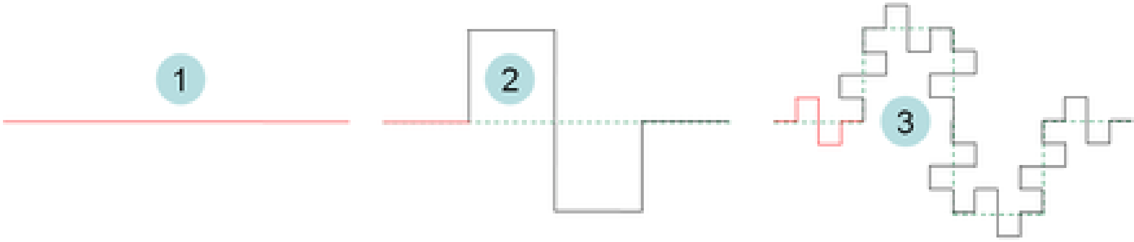
Pomocou programov pre zobrazovanie fraktálnych množín ako sú Xaos a Fractal sa nám podarilo zobraziť a vypočítať sebepodobnostné dimenzie niektorých fraktálnych množín. Pomocou programovacieho jazyka JavaScript a komponentu Canvas sme dokázali vytvoriť program pre zobrazovanie Mandelbrotovej množiny a Juliových fraktálnych množín.



Obrázek 3: Cantorova množina



Obrázek 4: Kochova krivka



Obrázek 5: Pravouhlá verzia Kochovej krivky

Poděkování

Poďakovať by sme sa chceli najmä Petrovi Paušovi, nášmu supervisorovi, za výklad učiva a spoluprácu a pomoc pri pracovaní na miniprojekte.

[5]

Reference

[1] Petr Pauš *Počítačové generování fraktálních množin*. https://geraldine.fjfi.cvut.cz/~pausp/tv2022/PDF/1-reserse.pdf 2003/2004.

[2] [online]. Dostupné z: http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/publikace/diplomka/doc/node39.html (1999)

[3] Shishikura, Mitsuhiro (1998). "The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets". Annals of Mathematics. Second Series. 147 (2): 225–267. arXiv:math.DS/9201282. doi:10.2307/121009. JSTOR 121009. MR 1626737. S2CID 14847943..

[4] 3Blue1Brown *Fractals are typically not self-similar* (2017) *https://www.youtube.com/watch?v=gB9n2gHsHN4*

[5] Náš generátor Mandelbrotovy a Juliových množin https://geraldine.fjfi.cvut.cz/~pausp/tv2022/mandel-julia.html (2022)