Keplerova úloha s dělovými koulemi

Vypracovali*: Marcel Rodák-Mendelovo gymnázium Opava*

RodakM@seznam.cz

Dominik Vít-Gymnázium Trutnov

Dominik.Vit@gmail.com

Jiří Nárožný-Gymnázium Boskovice

Jnarozny@atlas.cz

Abstrakt

Našim úkolem bylo seznámit se s *optimalizačními úlohami* mezi než patři variace na *Keplerovu úlohu o dělových koulích*. Hlavní náplní našeho mini-projektu bylo zejména řešení těchto optimalizačních otázek. K naší práci jsme používali nástroj v MS Excelu, *ŘEŠITEL (SOLVER),* který nám poskytl numerická řešení . Tyto hodnoty jsme následně porovnávali s našimi výsledky, k nimž jsme došli analytickou cestou. K problému jsme přistupovali *klasicky i netradičně*. Zpracovali jsme problematiku modelů v *1D, 2D i 3D*.

Klíčová slova:

- *Optimalizační úloha*
- *Řešitel*
- *Problém nejhustšího uspořádání*
- *Penalizace*
- *Energetický přístup*

Historie

V roce 1591 byl anglický matematik Tomas Herriot požádán svým přítelem Sirem Waltrem Raleighem, aby spočetl, jak nejlépe *složit dělové koule* do podpalubí jeho bitevní lodi, aby se jich zde vešlo co nejvíce. *Od roku 1606* si Herriot začal dopisovat s německým astronomem *Johannesem Keplerem* a roku 1611 se mu svěřil s úlohou o dělových koulích. Kepler se jen na krátko zamyslel a poté prohlásil, že je to jasné, že stačí pokládat *koule vedle sebe a vrchní vrstvy vždy posunout* tak, aby každá ležela v prohlubni. Bez většího přemýšlení tak uhodl optimální řešení úlohy, která se však později ukázala být mnohem více složitá, než Kepler předpokládal.

V 19. století se tímto problémem zaobíral německý matematik a vědec Carl Friedrich Gauss, neboť byl nespokojen s Keplerovým výsledkem bez důkazu. Dokázal však, že *Kepler měl pravdu*, ale pouze v pravidelné síti. Ve 20 století maďarský matematik Fejes Tóth dokázal, že můžeme všechna uspořádání zredukovat na konečný, přesto velký počet výpočtů. Na něj navázal Hales, který určil, že nejlepší uspořádání můžeme najít minimalizací *funkce o 150 neznámých.* V roce 1998 pak celý případ uzavřel a zbyly po něm 3 gigabyty dat a programů a 250 stránek poznámek.

Úvod do problematiky

Co je to optimalizační problém?

Jedná se o *matematickou úlohu*, najít konkrétní hodnoty proměnné jisté *účelové či cílové funkce,* pro které má zmíněná funkce *extrém*. Můžeme se s ním setkat v řadě aplikovaných i neaplikovatelných vědních oborů. Pro častou vysokou složitost či dokonce *nemožnost přesného analytického výpočtu* se hojně využívá numerických metod, pomocí kterých sice méně přesně, avšak efektivně najdeme řešení.

Problém s koulemi

Jde o poměrně starý *optimalizační problém*, *maximalizovat* hustotu uspořádání dělových koulí v uzavřeném prostoru. Úkolem je najít nejvýhodnější rozmístění, které tuto hustotu umožňují. Při optimalizaci jsme museli respektovat *omezující podmínky* rozměru úložného prostoru i minimální vzdálenosti středů jednotlivých koulí dané jejich poloměrem. Nutné je dodat, že v případě nekonečně velkého úložného prostoru, tedy případu, kdy nebereme na zřetel existenci ohraničující meze, může dojít ke změně optimálního prostorového uspořádání.

Naše pojetí

Pro lepší nahlédnutí do problematiky jsme před řešením původní úlohy zkoumali a řešili různá jiná, zjednodušená, modifikovaná, návodná zadání. Pro snadný začátek jsme stanuli před jednodimenzionálním problémem, který jsme si pro zpestření a obeznámení se s *ŘEŠITELEM* spočítali i numericky v MS *Excelu*. Záhy po osvojení základů, jsme neváhaje přikročili k nesnazším problémům ve vyšších dimenzích. Při zkoumání dvou a tří *dimenzionálních* problémů jsme „bojovali“ na více frontách. Analytické a numerické. Nakonec jsme si dokonce troufli být mírně *invenční*. Přidali jsme jí lehký f*yzikální nádech*…

Analytický přístup k věci

Tato matematicky exaktní metoda byla aplikována na dvou i trojrozměrný problém rozmístění tří kružnic, respektive tří koulí. K výpočtu jsme užili sofistikovaných úvah, pomocí kterých jsme byli schopni sestavit soustavu rovnic, jejichž řešením byla množina souřadnic, což byly středy kružnic, či středy koulí. Tato elegantní metoda obsahuje jisté myšlenky symetrií, pomocí kterých jsme velké množství potenciálních optimálních řešení zúžili na diskrétní případy, které jsme vyšetřili.

Z časových důvodů není důkaz v době uploadů hotov.

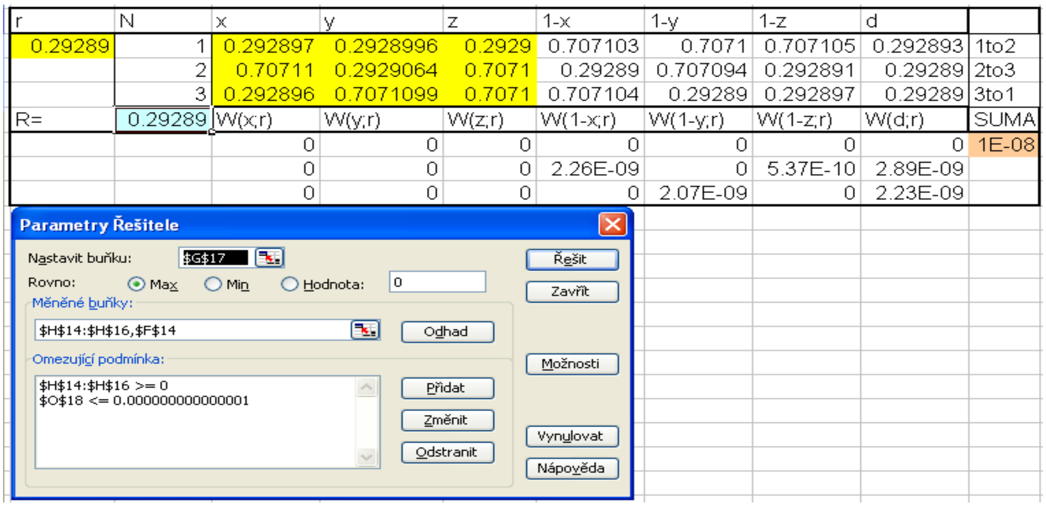
Numerický přístup k problému

Co je Řešitel?

Řešitel je *nástroj* v Excelu, který hledá lokální extrémy fci. Při zadání dobrých počátečních odhadů je schopný nalézt i globální extrém. Dokáže sám *generovat hodnoty* předem určených *proměnných* a s dostatečnou přesností je vypíše pro hledaný případ.

Naše práce v Excelu

vypadala přibližně takto:

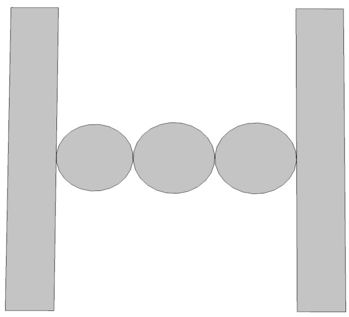


r	N	x	y	z	1-x	1-y	1-z	d	
0.29289	1	0.292897	0.2928996	0.2929	0.707103	0.7071	0.707105	0.292893	1to2
	2	0.70711	0.2929064	0.7071	0.29289	0.707094	0.292891	0.29289	2to3
	3	0.292896	0.7071099	0.7071	0.707104	0.29289	0.292897	0.29289	3to1
R=	0.29289	W(x;r)	W(y;r)	W(z;r)	W(1-x;r)	W(1-y;r)	W(1-z;r)	W(d;r)	SUMA
		0	0	0	0	0	0	0	1E-08
		0	0	0	2.26E-09	0	5.37E-10	2.89E-09	
		0	0	0	0	2.07E-09	0	2.23E-09	

Náš model pro tři koule v krychli o hraně 1

Na **model 1D** jsme aplikovali metodu řešení pomocí *nerovnic*.

Problém zní, umístit tři úsečky o největší možné délce na jednu úsečku a délce předem určené (za rozměr předem určeného prostoru jsme si ve všech případech zadali 1). Střed úsečky jsme si označili x s indexem a polovina délky byla r. Úsečky museli splnit tři zásadní podmínky a to nepřesahovat okraje a samy sebe. Tyto podmínky jsem využili jako soustavu nerovnic.



2D model

Zde jsme použili metodu zvanou *PENALIZACE*

Základní myšlenkou je, při *porušení podmínek* se výrazně sníží hodnota fce, u které hledáme maximum. Zvolíme si *koeficient penalizace* (dostatečně vysoký) a „pokutu" počítáme za *přesah* stěn a jiných koulí

$$p_1=\sum_{i,k} \min(0; x_{i,k}-r)^2$$

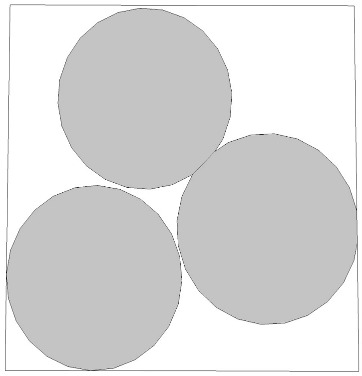
$$p_2=\sum_{i,k} \min(0; 1-x_{i,k}-r)^2$$

$$p_3=\sum_{i<j} \min\left(0; \frac{d_{ij}}{2}-r\right)^2$$

$$\Phi=r-\lambda\cdot(p_1+p_2+p_3)$$

Lambda je koeficient a p je penalizace.

Ve 2D jsme řešili 3 kruhy ve čtverci



Pro **trojrozměrný model** jsme použili částečně vlastní nápad.

Vytvořili jsme energetický model. Tento model popisuje *silovou (odpudivou) interakci* částic, které symbolizovaly *středy koulí*. Při této interakci musí dojít k *minimalizaci potenciální energie* systému. V našem modelu jsme tuto interakci vyjádřili tak, že když se dvě koule *nedotýkají* tak je působení *rovno nule* a při *průniku* jedné koule do druhé fce roste *neomezeně*. Celková potenciální energie soustavy se má blížit nule a přitom má být *největší možný poloměr.*

Celková energie je součet všech složek energie. Nechť W je fce $W(a)=\max(0; 1-a)^2$

pak $E_1=W\left(\frac{x_{i.k}}{r}\right)$; $E_3=W\left(\frac{d_{ij}}{2r}\right)$; $E_2=W\left(\frac{1-x_{i.k}}{r}\right)$ a

$$O=\sum_i W\left(\frac{x_i}{r}\right)+\sum_i W\left(\frac{1-x_i}{r}\right)+\sum_{i\neq j} W\left(\frac{d_{ij}}{2\pi}\right)=0$$

a pro O = 0 zjistíme nejvyšší možné r.

Závěr

V našem mini-projektu jsme se seznámili s *optimalizací*. Vyřešili jsme několik triviálních případů a vytvořili jsme *model rozmístění tří koulí v krychli*. Porovnávali jsme *výhody a nevýhody* numerického a analytického výpočtu. Náš závěr je, že analytické řešení je přesné, ale velice *obtížné a zdlouhavé*. Oproti tomu numerické lze aplikovat na všechny případy a jeho *nepřesnost* lze snížit na únosnou mez, která není překážkou při aplikaci na fyzikální modely.

Poděkování

Doc. Ing. Jaromíru Kukalovi Ph.D.