Výpočet obsahu plošných obrazců metodou Monte Carlo

Tomáš Bárta

Gymnázium Nad Štolou, tmbrta@gmail.com

František Falda

Gymnázium Trutnov, fffrantik@seznam.cz

Boris Odložilík

Ekogymnázium Brno, b.odlozilik@seznam.cz

Abstrakt

Naším hlavním cílem bylo seznámit se se stochastickou metodou výpočtu Monte Carlo. Využili jsme tuto metodu pro výpočet plochy pod grafem funkce a výsledek jsme porovnali jak s analytickým, tak s numerickým výpočtem pomocí obdélníkové metody. S její pomocí jsme také odhadli hodnotu Ludolfova čísla. Využili jsme ji také pro výpočet plochy implicitně zadaného obrazce. Zde se tato metoda osvědčila, avšak v případech, kdy jsme schopni určitý integrál spočítat pomocí obdélníkové metody se ukázala jako nepřesná a pomalu konvergující.

1 Úvod

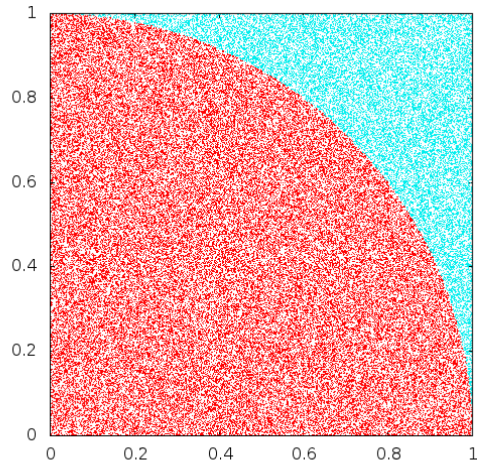
Monte Carlo je stochastická metoda. Při výpočtu obsahu plošného obrazce náhodně volíme body v námi ohraničené oblasti. Ze zadání křivky můžeme poté určit, zda se bod trefil do oblasti vymezené křivkou či nikoliv. Z poměru počtu bodů v obrazci ku celkovému počtu bodů můžeme poté určit obsah ohraničené plochy S podle vzorce

$$S = \frac{N_{\text{uvnitř}}}{N_{\text{celkem}}} \cdot S_{\text{oblast}} \,,$$

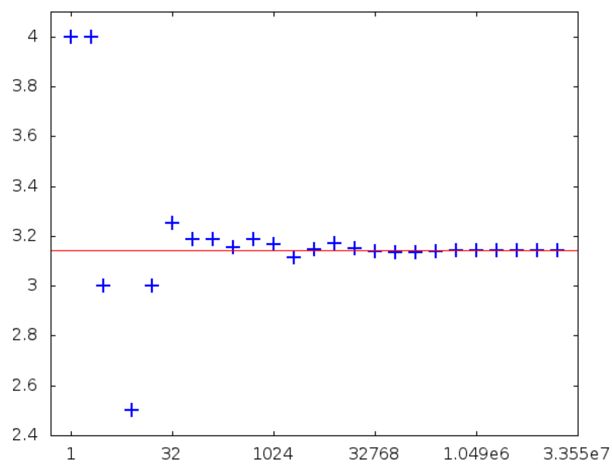
kde $N_{\text{uvnitř}}$ je počet střel, které padly do oblasti, jejíž obsah počítáme a N_{celkem} je celkový počet střel a S_{oblast} je obsah celé oblasti, do které jednotlivé body střílíme.

2 Tělo příspěvku

Naším prvním cílem bylo přibližně vypočítat hodnotu čísla π. Pro tento účel jsme v rovině vymezili čtverec o straně 1 s levým dolním rohem v počátku soustavy souřadnic. Náhodné souřadnice x i y byly tedy voleny na intervalu $\langle 0;1\rangle$. Nerovností $x^2 + y^2 \leq 1$ jsme vymezili čtvrtkruh. Provedli jsme 10 měření, při každém jsme náhodně zvolili $3 \cdot 10^7$ bodů. Na obrázku 1 jsou tyto náhodně zvolené body znázorněny – body pod obloukem kružnice jsou ty, co splnily podmínku $x^2 + y^2 \leq 1$. Zjištěné hodnoty jsme zprůměrovali a určili směrodatnou odchylku [2]. Hodnotu π jsme tedy spočítali jako $3{,}141584 \pm 0{,}000282$. Pro ilustraci jsme při výpočtu začali s jedním náhodným bodem a jejich počet postupně zvyšovali, abychom viděli, jak rychle naměřená hodnota konverguje ke skutečné známé hodnotě π. Z obrázku 2 je patrné, že od určitého počtu výstřelů se hodnota zpřesňuje minimální rychlostí.



Obrázek 1: Výpočet π

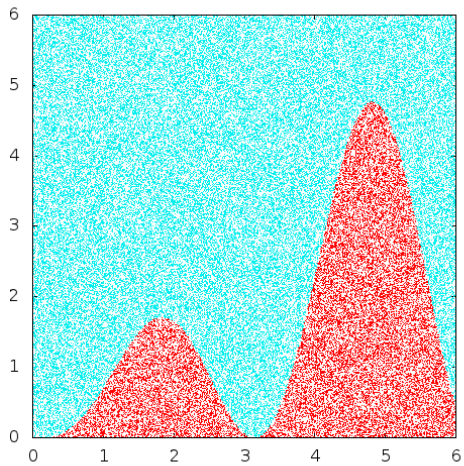


Obrázek 2: Postupná konvergence k hodnotě π

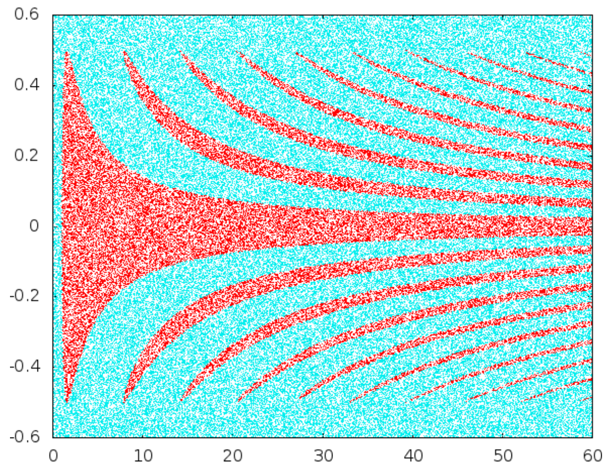
Dále jsme chtěli pomocí metody Monte Carlo spočítat určitý integrál nějaké analyticky integrovatelné funkce a výsledek porovnat s analytickým řešením a s řešením získaným numericky pomocí obdélníkové metody. Pro tento účel jsme zvolili funkci $y = x\sin^2 x$ a integrovali jsme ji v rozmezí 0 až 6. Analytický výsledek nám vyšel

$$\int_0^6 x\sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{37}{4} - 3\cos 6 \sin 6 - \frac{1}{4}\cos^2 6\,,$$

což je přibližně 9,824378.



Obrázek 3: Výpočet $\int_0^6 x\sin^2 x \,\mathrm{d}x$



Obrázek 4: Výpočet plochy ohraničené křivkou zadanou rovnicí $\sin(xy)\cos(xy) = y$

Metodou obdélníkovou jsme získali výsledek 9,824164489 při kroku o velikosti 0,001 (dohromady tedy 6000 kroků). Při počítání pomocí metody Monte Carlo jsme náhodně zvolili 10^7 bodů a měření opakovali 10krát. Vypočítaná hodnota byla přibližně 9,824869.

Bylo tedy provedeno řádově mnohem více iterací než při obdélníkové metodě a přesnost výsledku je přibližně stejná. V tomto případě se tedy metoda Monte Carlo ukázala jako příliš pomalá.

Při metodě Monte Carlo by chyba měření měla klesat s odmocninou počtu střel. Abychom tento předpoklad ověřili, zkusili jsme obsah pod touto křivkou počítat s různým počtem střel. Výsledky v tabulce 1 naznačují, že toto skutečně platí, neboť kvocientem mezi směrodatnými odchylkami je skutečně přibližně $\sqrt{10}$.

počet střel / měření	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
1	9,612000	9,637200	9,848520	9,822456	9,825041
2	9,612000	10,008000	9,808560	9,830016	9,817621
3	9,900000	9,932400	9,844920	9,810864	9,831593
4	8,892000	9,806400	9,731520	9,822960	9,830545
5	9,684000	9,781200	9,753840	9,817308	9,826747
6	9,396000	9,781200	9,864720	9,816156	9,818863
7	10,080000	9,910800	9,851040	9,830268	9,825606
8	9,324000	9,950400	9,884520	9,823068	9,821650
9	9,972000	9,720000	9,797400	9,828612	9,829174
10	9,324000	9,842400	9,786960	9,851832	9,821372
Φ	9,579599	9,837000	9,817201	9,825354	9,824821
σ	0,340176	0,108374	0,047351	0,010659	0,004596

Tabulka 1: Postupné zvyšování počtu střel

Nakonec jsme metodu použili na výpočet obsahu obrazce, jehož ohraničení je zadáno implicitně a nemůžeme ho tedy spočítat ani analyticky ani obdélníkovou metodou. Jako obrazec, jehož obsah chceme spočítat jsme si zvolili útvar, který je ohraničen křivkou zadanou rovnicí $\sin(xy)\cos(xy) = y$ na intervalu $\langle 1; 0\rangle$. Opět jsme provedli 10 měření po 10^7 bodech. Obsah obrazce jsme stanovili na $22.48678398 \pm 0.00683647$. Tento výsledek nemáme jak ověřit, ale směrodatná odchylka je poměrně malá a skutečný výsledek by se tedy neměl příliš lišit.

3 Shrnutí

Úspěšně jsme pochopili stochastickou metodu Monte Carlo a aplikovali jsme ji na několik případů pro vypočtení obsahu plošných obrazců. Podařilo se nám poměrně přesně odhadnout hodnotu čísla π. Při porovnání s obdélníkovou metodou výpočtu určitého integrálu se ovšem metoda Monte Carlo ukázala jako velice pomalá a nepřesná. Podařilo se nám také ověřit, že chyba měření klesá s odmocninou počtu iterací. Nakonec jsme vypočítali obsah implicitně zadaného obrazce, jehož obsah jsme nebyli schopni spočítat ani analyticky ani obdélníkovou metodou.

Poděkování

Na závěr chceme poděkovat vedoucímu naší práce Ing. Petru Ambrožovi z katedry matematiky, který nám vysvětlil vše potřebné a po celou dobu nám trpělivě pomáhal.

Dále bychom rádi poděkovali také celé Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské na Českém vysokém učení technickém v Praze, která zorganizovala Týden Vědy na FJFI 2012.

Reference

[1] M. Virius, *Metoda Monte Carlo*, České vysoké učení technické v Praze, 2010.

[2] *Wikipedia: Standard deviation*, http://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation [cit. 2012-06-19]