Matematický popis systémů interagujících částic

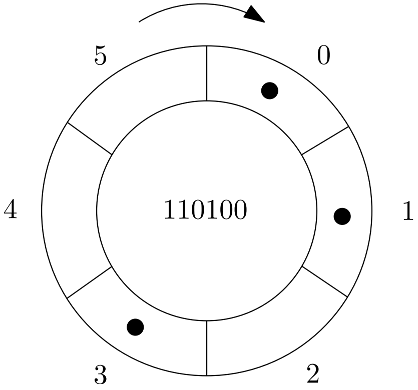
Miroslav Hanzelka, Václav Rozhoň

Gymnázium Česká Lípa, Žitavská 2969;
mirekhanzelka@gmail.com
Gymnázium J. V. Jirsíka, Fráni Šrámka 23, České Budějovice;
vaclavrozhon@gmail.com

TV@J 2013
20. června 2013

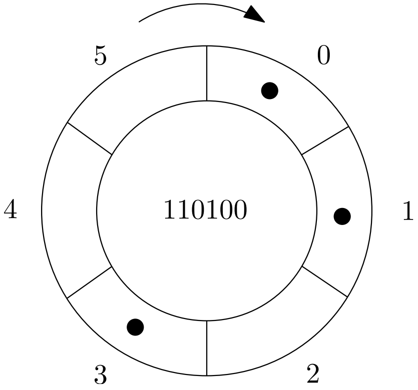
ÚVOD

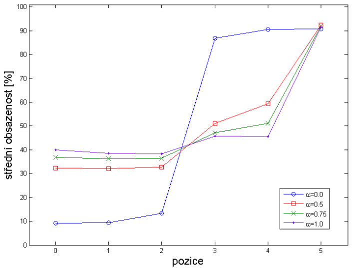
- Definujeme jednoduchý model pro pohyb chodců.



ÚVOD

- Definujeme jednoduchý model pro pohyb chodců.
- Nalezneme průměrné hodnoty obsazenosti jednotlivých buněk.



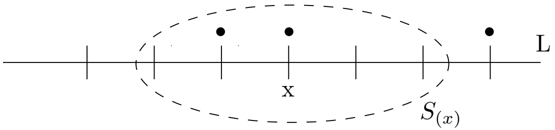


IPS – Systémy interagujících částic

- Částice se pohybují pomocí přeskoků mezi buňkami mřížky $\mathbb{L}$.

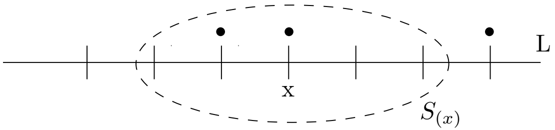
IPS – Systémy interagujících částic

- Částice se pohybují pomocí přeskoků mezi buňkami mřížky $\mathbb{L}$.
- Pravděpodobnost přeskoku $w(x \to y) = \Pr[x \to y | S_{(x)}]$.



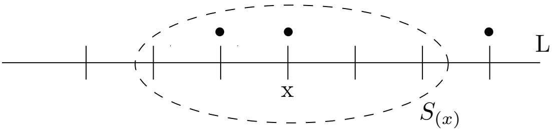
IPS – Systémy interagujících částic

- Částice se pohybují pomocí přeskoků mezi buňkami mřížky $\mathbb{L}$.
- Pravděpodobnost přeskoku $w(x \to y) = \Pr[x \to y | S_{(x)}]$.
- Stav systému $\eta_t = (\eta_t(x))_{x \in \mathbb{L}}$.



IPS – Systémy interagujících částic

- Částice se pohybují pomocí přeskoků mezi buňkami mřížky $\mathbb{L}$.
- Pravděpodobnost přeskoku $w(x \to y) = \Pr[x \to y | S_{(x)}]$.
- Stav systému $\eta_t = (\eta_t(x))_{x \in \mathbb{L}}$.
- $\eta_t(x)$ označuje počet částic v buňce x a čase t.



Markovovy procesy

Definice

Buď $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *náhodný proces. Potom ho nazýváme markovským, pokud*

$$\Pr[\eta_{n+1} = j | \eta_n = i; \eta_{n-1} = i_{n-1}; \dots ; \eta_0 = i_0] = \Pr[\eta_{n+1} = j | \eta_n = i].$$

Markovovy procesy

Definice

Buď $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *náhodný proces. Potom ho nazýváme markovským, pokud*

$$\Pr[\eta_{n+1} = j | \eta_n = i; \eta_{n-1} = i_{n-1}; \ldots ; \eta_0 = i_0] = \Pr[\eta_{n+1} = j | \eta_n = i].$$

Definice

Markovský proces je homogenní právě tehdy, když

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \Pr[\eta_{n+1} = j | \eta_n = i] = \Pr[\eta_1 = j | \eta_0 = i] =: p_{ij}.$$

Matici $P = (p_{ij})$ *nazýváme matice přechodu.*

Stacionární řešení a hustotní profil

Definice

Vektor π je stacionárním řešením markovského procesu právě tehdy, když

$$\pi = P^T \pi.$$

Stacionární řešení a hustotní profil

Definice

Vektor π je stacionárním řešením markovského procesu právě tehdy, když

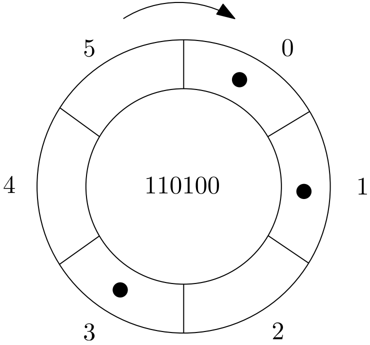
$$\pi = P^T \pi.$$

Definice

Hustotní profil definujeme jako vektor ρ, jehož složky jsou určeny vztahem

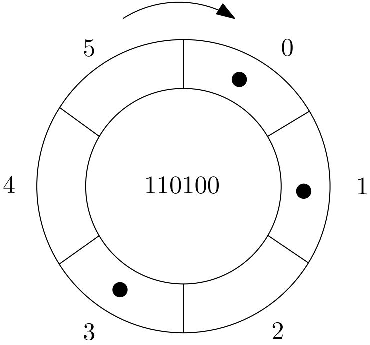
$$\rho(i) = \sum_{\eta \in X} \eta(i) \pi(\eta).$$

Popis modelu



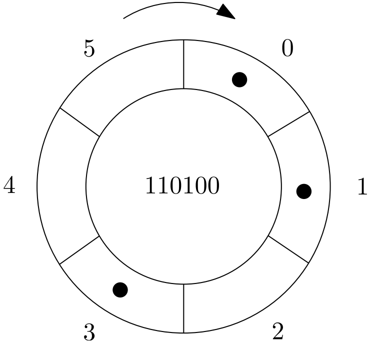
- Pohyb částic se vyhodnocuje paralelně.

Popis modelu



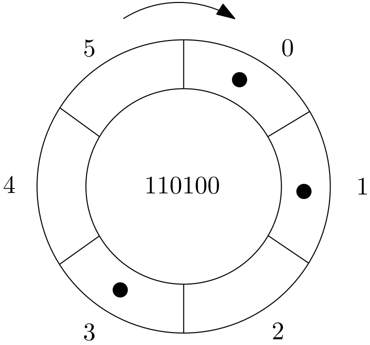
- Pohyb částic se vyhodnocuje paralelně.
- Pokud je částice na pozici i a pozice $i+1$ je volná, přeskočí do ní s pravděpodobností p_i.

Popis modelu



- Pohyb částic se vyhodnocuje paralelně.
- Pokud je částice na pozici i a pozice $i + 1$ je volná, přeskočí do ní s pravděpodobností p_i.
- Pokud je pozice $i + 1$ obsazená a $i + 2$ volná, přeskočí do druhé jmenované s pravděpodobností αp_i, kde $\alpha \in \langle 0; 1\rangle$.

Popis modelu



- Pohyb částic se vyhodnocuje paralelně.
- Pokud je částice na pozici i a pozice $i+1$ je volná, přeskočí do ní s pravděpodobností p_i.
- Pokud je pozice $i+1$ obsazená a $i+2$ volná, přeskočí do druhé jmenované s pravděpodobností αp_i, kde $\alpha \in \langle 0; 1 \rangle$.
- Pokud by měly dvě částice skočit na stejnou pozici, vybere se náhodně jedna z nich.

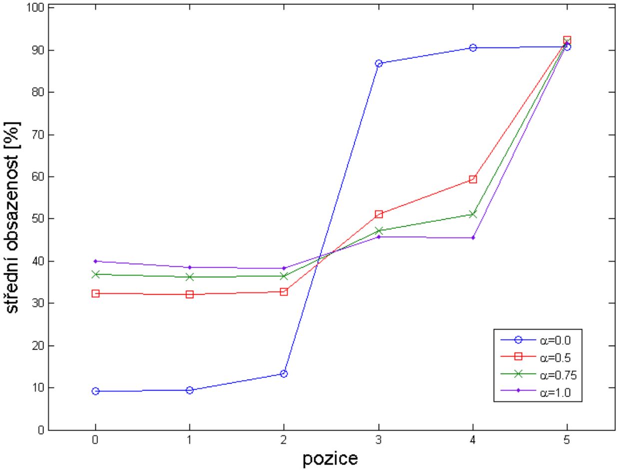
Matice přechodu

	111000	011100	001110	000111	100011	110001	110100	110010	110100	110010	110100	101100	100110	101100	100110	101100	101001	100101	101010	010101
111000	c1	0	0	0	0	0	a1	0	0	0	0	b1	0	0	0	0	0	0	0	0
011100	0	c2	0	0	0	0	0	0	a2	0	0	0	0	b2	0	0	0	0	0	0
001110	0	0	c3	0	0	0	0	0	0	0	a3	0	0	0	0	b3	0	0	0	0
000111	0	0	0	c4	0	0	0	0	0	0	0	0	a4	0	0	0	0	b4	0	0
100011	0	0	0	0	c5	0	0	b5	0	0	0	0	0	0	a5	0	0	0	0	0
110001	0	0	0	0	0	c0	0	0	0	b0	0	0	0	0	0	0	a0	0	0	0
110100	0	b0*q3	0	0	0	0	c0*q3	c0*p3	b0*p3	0	0	a0*q3	0	0	0	0	0	0	a0*p3	0
110010	0	0	0	0	0	c0*p4	0	c0*q4	b0*q4	b0*p4	0	0	0	0	0	0	a0*p4	0	a0*q4	0
011010	0	0	b1*q4	0	0	0	0	0	c1*q4	c1*p4	b1*p4	0	0	a1*q4	0	0	0	0	0	a1*p4
011001	c1*p5	0	0	0	0	0	a1*p5	0	0	c1*q5	b1*q5	b1*p5	0	0	0	0	0	0	0	a1*q5
001101	0	0	0	b2*q5	0	0	0	0	0	0	c2*q5	c2*p5	b2*p5	0	0	a2*q5	0	0	a2*p5	0
101100	0	c2*p0	0	0	0	0	0	0	a2*p0	0	0	c2*q0	b2*q0	b2*p0	0	0	0	0	a2*q0	0
100110	0	0	0	0	b3*q0	0	0	0	0	0	0	0	c3*q0	c3*p0	b3*p0	0	0	a3*q0	0	a3*p0
010110	0	0	c3*p1	0	0	0	0	0	0	0	a3*p1	0	0	c3*q1	b3*q1	b3*p1	0	0	0	a3*q1
010011	0	0	0	0	0	b4*q1	0	a4*q1	0	0	0	0	0	0	c4*q1	c4*p1	b4*p1	0	a4*p1	0
001011	0	0	0	c4*p2	0	0	0	0	0	0	0	0	a4*p2	0	0	c4*q2	b4*q2	b4*p2	a4*q2	0
101001	b5*q2	0	0	0	0	0	b5*p2	0	0	a5*q2	0	0	0	0	0	0	c5*q2	c5*p2	0	a5*p2
100101	0	0	0	0	c5*p3	0	b5*q3	b5*p3	0	0	0	0	0	0	a5*p3	0	0	c5*q3	0	a5*q3
101010	0	0	0	0	0	0	0	0	p0*q2*q4	p0*q2*p4	0	0	q0*p2*q4	p0*p2*q4	0	0	q0*q2*p4	q0*p2*p4	q0*q2*q4	p0*p2*p4
010101	0	0	0	0	0	0	q1*q3*p5	q1*p3*p5	0	0	p1*q3*q5	p1*q3*p5	0	0	q1*p3*q5	p1*p3*q5	0	0	p1*p3*p5	q1*q3*q5

- $w(110 \to 101) = a_i = p_{i+1}\left(1 - \frac{\alpha p_i}{2}\right)$.
- $w(110 \to 011) = b_i = \alpha p_i\left(1 - \frac{p_{i+1}}{2}\right)$.
- $q_i = 1 - p_i$.
- $c_i = 1 - a_i - b_i$.

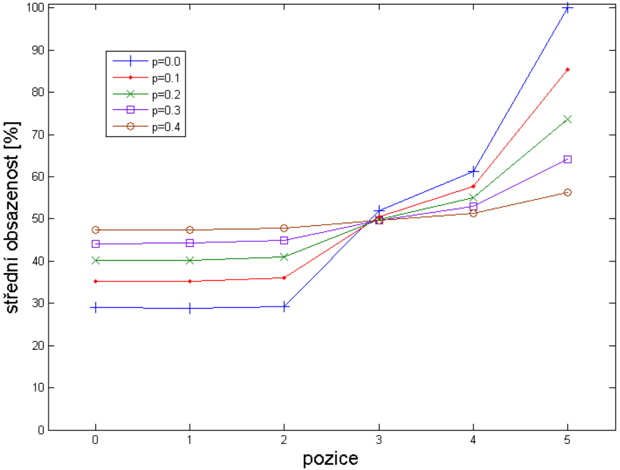
Zúžení – závislost na agresivitě

Graf: $p_i = 0,5$ pro $i \in 0,1,2,3,4$ a $p_5 = 0,05$.



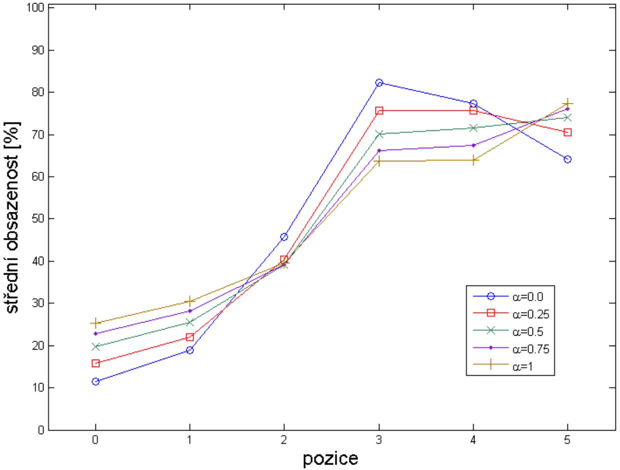
Zúžení 2

Graf: $p_i = 0,5$ pro $i \in 0,1,2,3,4$ a proměnným p_5.



Postupné zužování

Graf: $p_i = 0,6 - 0,1i$.



Děkujeme za pozornost