Optimální mince a bankovky

David Jančar, Jakub Svoboda, Aneta Šťastná, Oskar Turek

Týden vědy

červen 2013

Program

1. Platba pomocí mincí
2. Placení pomocí hladového algoritmu
3. Směna

Program

1. Platba pomocí mincí
2. Placení pomocí hladového algoritmu
3. Směna

Efektivita platby

- V čem je výhoda našich mincí ?

Efektivita platby

- V čem je výhoda našich mincí ?
- Platíme malým počtem mincí ?

Efektivita platby

- V čem je výhoda našich mincí ?
- Platíme malým počtem mincí ?
- Používáme hladový algoritmus ?

Efektivita platby

- V čem je výhoda našich mincí ?
- Platíme malým počtem mincí ?
- Používáme hladový algoritmus ?
- Jak se liší rozměňování a směna?

Reprezentace částky

Příklad

Reprezentace částky 15 v českých korunách je např.:

- $(15, 0, 0, 0, 0, 0)$

$$15 = 15 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 50$$

- $(0, 0, 1, 1, 0, 0)$

$$15 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 50.$$

Pak platí: $\mathrm{cost}(15, 0, 0, 0, 0, 0) = 15$ *a* $\mathrm{cost}(0, 0, 1, 1, 0, 0) = 2$.

Optimální reprezentace

Příklad

Optimální reprezentace částky 15 *v korunách je*

- $(0,0,1,1,0,0)$, *počet mincí je pak* $cost(0,0,1,1,0,0) = 2$, *tj. minimální možný.*

Optimální systém mincí

Příklad

Průměrný počet použitých mincí (korun českých) v optimální reprezentaci částek od 1 *do* 100 *je roven* $3,42$. *Se systémy*

$$(1, 4, 6, 21, 30, 37)$$

$$(1, 5, 8, 20, 31, 33)$$

by to bylo $2,92$, *což jsou optimální systémy pro šest mincí.*

Přidání mince

- Jakou hodnotu mince ideálně přidat tak, aby průměrný počet použitých mincí byl co nejnižší?

Přidání mince

- Jakou hodnotu mince ideálně přidat tak, aby průměrný počet použitých mincí byl co nejnižší?
- Ideálně přidat minci 33 nebo 37
- Průměrný počet použitých mincí klesne z $3,42$ na $2,88$

Program

1 Platba pomocí mincí

2 Placení pomocí hladového algoritmu

3 Směna

Hladové vybírání mincí

- Placení hodnotou e_D dokud $n - e_D a_D > e_D$, kde a_D je počet mincí v hodnotě e_D použité při placení.
- Opakování s hodnotami $e_{D-1}, e_{D-2}, \ldots, e_1$
- *Hladová reprezentace* čísla je pak $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, značíme $\mathrm{hlad}(n, e_1, e_2, \ldots, e_D)$

Hladové vybírání mincí

- Placení hodnotou e_D dokud $n - e_D a_D > e_D$, kde a_D je počet mincí v hodnotě e_D použité při placení.
- Opakování s hodnotami $e_{D-1}, e_{D-2}, \ldots, e_1$
- *Hladová reprezentace* čísla je pak $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, značíme $\mathrm{hlad}(n, e_1, e_2, \ldots, e_D)$

Příklad

Číslo 56 zaplatíme hladovým algoritmem:

$$56 = 1 \cdot 50 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1,$$

tj. $\mathrm{hlad}(56; 1, 2, 5, 10, 20, 50) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$.

Hladový algoritmus a český mincový systém

V českém mincovním systému jsou průměrné počty mincí při užití hladového algoritmu stejné jako optimální počet užitých mincí.

Hladový algoritmus a český mincový systém

V českém mincovním systému jsou průměrné počty mincí při užití hladového algoritmu stejné jako optimální počet užitých mincí.

Příklad

Toto tvrzení nefunguje u všech mincovních systémů. Příkladem může být systém $(1, 7, 10)$.

Přidání mince k hladovému algoritmu

- Jakou hodnotu mince ideálně přidat tak, aby průměrný počet použitých mincí pro hladový algoritmus byl co nejnižší?

Přidání mince k hladovému algoritmu

- Jakou hodnotu mince ideálně přidat tak, aby průměrný počet použitých mincí pro hladový algoritmus byl co nejnižší?
- Ideálně přidat libovolnou minci mezi 3 a 9
- Průměrný počet použitých mincí klesne z $3,42$ na $3,22$
- Obecně čím menší hodnota mince se přidá, tím větší přiblížení optimu

Příklad

Hodnota nové mince	*Průmerný počet použitých mincí*
nad 50	*3,41*
49 - 21	*3,34*
20-11	*3,30*
9-3	*3,22*

Omezený počet mincí každé hodnoty

- Druh efektivity placení
- Hledání mincovního systému, aby počet mincí při platbě nepřesáhl hodnotu k

Omezený počet mincí každé hodnoty

- Druh efektivity placení
- Hledání mincovního systému, aby počet mincí při platbě nepřesáhl hodnotu k

Příklad

Jaký je potřebný počet mincí každého druhu (v českém systému) na zaplacení libovolné částky?

Program

1 Platba pomocí mincí

2 Placení pomocí hladového algoritmu

3 Směna

Směna

- Placení i vracení
- Umožňuje snížit počet použitých mincí
- Uplatnění v 26% případů

Směna

- Placení i vracení
- Umožňuje snížit počet použitých mincí
- Uplatnění v 26% případů

Příklad

Jakým způsobem zaplatit 38 Kč?
Jaký je potřebný počet mincí každého druhu (v českém systému)?

Děkujeme za pozornost!

M. Kleber, R. Vakil, and J. Shallit, *What this country needs is an* 18 *cent piece*, Mathematical Intelligencer **25(2)** (2003), 20–23