Výpočet obsahu plošných obrazců metodou Monte Carlo

Ondřej Čajánek

Zuzana Drázdová

František Gašpar

Filip Stanislav

Ing. Petr Ambrož, Ph.D.

Praha 2013

Metoda Monte Carlo

- Nalézání řešení pomocí mnohokrát opakovaných náhodných pokusů
- Matematika, fyzika, finance, hry, atd.
- Přesnost závisí na použitém počtu realizací náhodné veličiny
- První použití v laboratořích Los Alamos (40. léta)
- Inspirace ruletou

Naše práce

- Metoda výpočtu obsahů
- Výpočet hodnoty π
- Výpočet obsahu plochy pod křivkou
- Porovnání metody Monte Carlo a obdélníkové metody
- Výpočet obsahu uzavřené (implicitně zadané) křivky
- Vizualizace získaných dat

Metoda výpočtu obsahů

- Generování náhodných bodů v oblasti o známém obsahu

- Vyjádření poměru pozitivních výsledků ku všem náhodným pokusům

$$\frac{N_{uvnitř}}{N_{celkem}} = \frac{S_{obrazec}}{S_{oblast}}$$

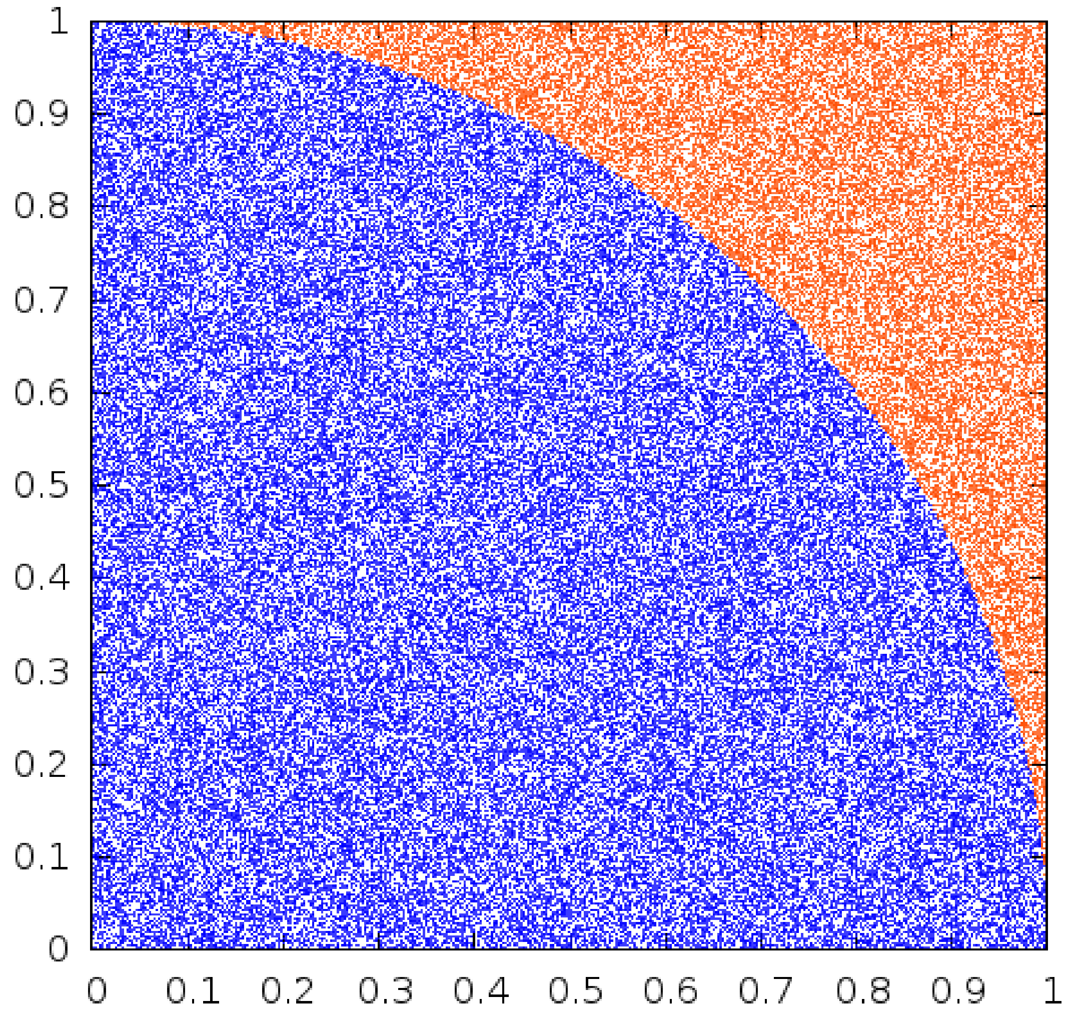
- Po deseti výpočtech obsahu obrazce (S_1, …, S_{10}) zjišťujeme směrodatnou odchylku podle vzorce:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(S_i - \bar{S}\right)^2}$$

Výpočet hodnoty π

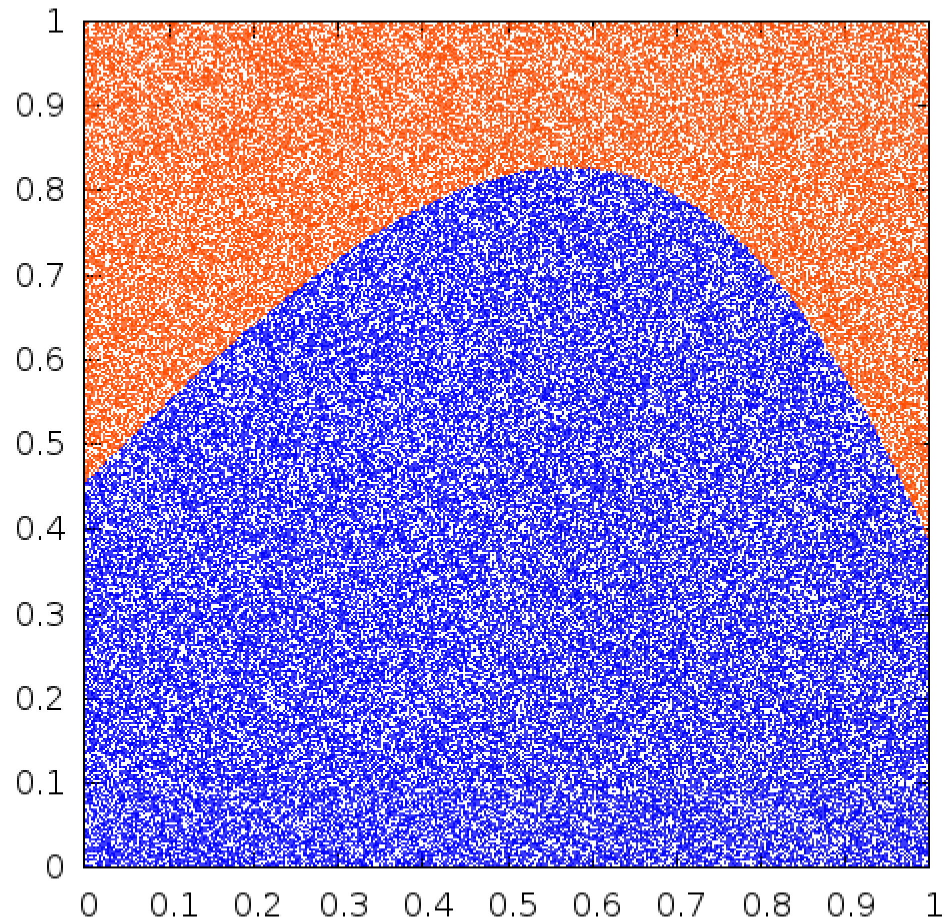
- $x^2 + y^2 = 1$
- $\pi = 4\,\dfrac{N_{uvnitř}}{N_{celkem}}$

Počet bodů	**10^9**
Vypočtené π	3,1415447
Skutečné π	3,1415927



Výpočet obsahu plochy pod křivkou

- $f(x) = \sin e^{x} \cdot \cos e^{-x}$
- $S_{obrazec} = \frac{N_{uvnitř}}{N_{celkem}}$



Obdélníková metoda

- $f(x) = \sin e^{x} \cdot \cos e^{-x}$

počet kroků	plocha
10	0,72662853
100	0,68777728
1000	0,68748308
10000	0,68748957
100000	0,68745186

Metoda Monte Carlo

- $f(x) = \sin e^{x} \cdot \cos e^{-x}$

Počet bodů	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
výpočet 1	0,68400000	0,68400000	0,68831000	0,68708200	0,68754560
výpočet 2	0,70800000	0,69120000	0,68619000	0,68736700	0,68767570
výpočet 3	0,67700000	0,69060000	0,68788000	0,68720600	0,68738660
výpočet 4	0,69600000	0,69340000	0,68696000	0,68767100	0,68741620
výpočet 5	0,71000000	0,68590000	0,68729000	0,68752000	0,68744540
výpočet 6	0,67300000	0,69590000	0,68962000	0,68743300	0,68773260
výpočet 7	0,69900000	0,68410000	0,68726000	0,68697900	0,68738140
výpočet 8	0,67800000	0,69350000	0,68505000	0,68791800	0,68748770
výpočet 9	0,69400000	0,68710000	0,68745000	0,68765500	0,68759540
výpočet 10	0,67600000	0,68300000	0,68602000	0,68723900	0,68722440
arit. průměr	0,68950000	0,68887000	0,68720300	0,68740700	0,68748910
směr. odchylka	0,01299423	0,00438954	0,00121316	0,00027655	0,00014422

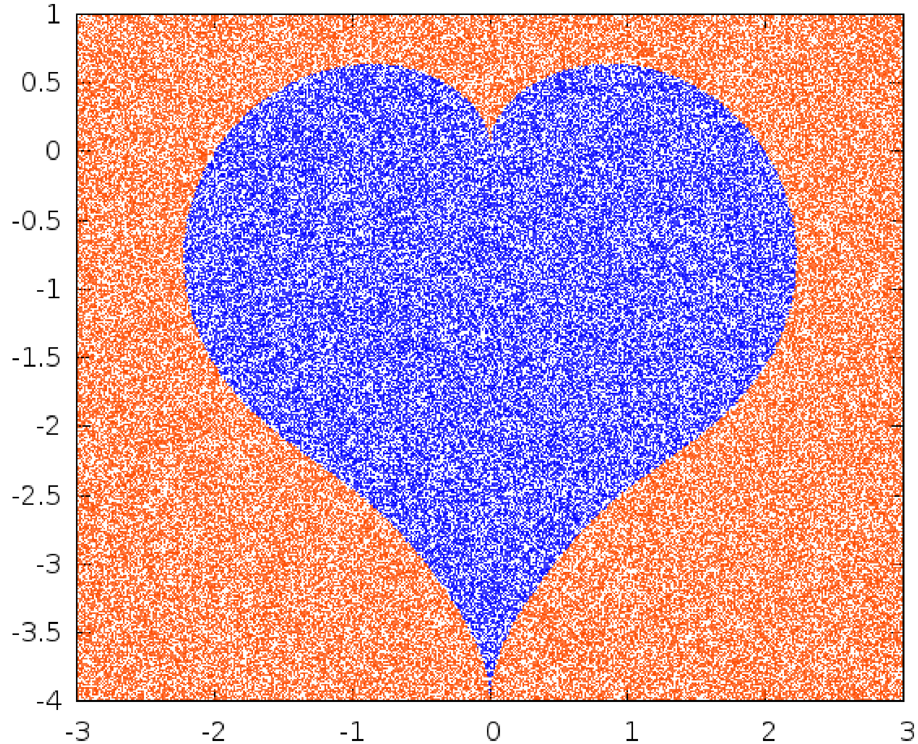
Porovnání metod

Počet kroků	Monte Carlo	Obdélníková m.
1000	**0,68**950000	**0,6874**8308
10000	**0,68**887000	**0,6874**8957
100000	**0,687**20300	**0,6874**5186
1000000	**0,6874**0700	
10000000	**0,6874**8910	

Výpočet obsahu uzavřené křivky

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2+y^2} - 2y + \frac{y\sqrt{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1{,}4}$$

Počet bodů	10^8
arit. průměr	12,5233071
směr. odchylka	0,00483151



Poděkování

Děkujeme FJFI ČVUT a organizátorům Týdne vědy za možnost zúčastnit se tohoto projektu a za poskytnutí zázemí a technických prostředků.

Významný dík patří garantovi našeho projektu Petru Ambrožovi za trpělivost, skvělou spolupráci a odbornou korekturu naší práce.

Použité zdroje

[1] Miroslav Virius, Metoda Monte Carlo
České vysoké učení technické v Praze, 2010

[2] Dokumentace k programovacímu jazyku Python
http://docs.python.org/3/

[3] Dokumentace k programu gnuplot
http://www.gnuplot.info/help.html