Optimální mince v českém platebním systému

David Jančar*, Jakub Svoboda, Aneta Šťastná, Oskar Turek*
Gymnázia: Karlínské*, Česká a Olympijských nadějí, Omská
davca105seznam.cz, ZZ19ZZ@seznam.cz,
aneta.stastna@email.cz, OTurek@seznam.cz

Abstrakt

Zamýšleli jste se už někdy nad tím, v čem je výhoda našich mincí? Je vůbec nějaká? Je pravda, že zaplatíme libovolnou částku malým počtem mincí? Dostaneme pomocí hladového algoritmu minimální počet mincí? Nehodilo by se přidat nějakou novou hodnotu mince? Na výše zmíněné otázky jsme odpověděli během tohoto miniprojektu.

1 Platba pomocí mincí

Cílem je platit co nejefektivněji. Efektivita placení pak může mít různé podoby, jak ukážeme v následujícím textu, pro který jsme čerpali inspiraci z článku [1]. Můžeme chtít používat co nejméně mincí, platit pomocí hladového algoritmu, platit pomocí mincí rovnoměrně, mít co nejlehčí peněženku apod. Jistě čtenáře při čtení příspěvku napadnou i další otázky spojené s placením. Budeme rádi, když nám takové otázky sdělí.

2 Rozměňování

Nejprve se budeme zabývat úlohou, kdy je z mincí potřeba skládat částky od 1 do hodnoty nejmenší bankovky, tedy pro český systém mincí od 1 do 100. Začneme zavedením a vysvětlením pojmu reprezentace částky.

Jsou dány hodnoty mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ (uspořádané vzestupně), přičemž $e_1 = 1$ (aby šlo zaplatit každou částku). Máme-li částky n v hodnotách od 1 do N, kde N je hodnota nejmenší bankovky, pak každou D-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, kde $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, takovou, že

$$n = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_D e_D,$$

nazveme *reprezentací částky* n. Počet použitých mincí v reprezentaci značíme $\operatorname{cost}(a_1, a_2 \ldots, a_D)$, tedy

$$\operatorname{cost}(a_1, a_2 \ldots, a_D) = a_1 + a_2 + \cdots + a_D.$$

Příklad 1. *Uvažujme české mince* $1, 2, 5, 10, 20$ *a* 50*Kč, pak reprezentace částky* 15 *je např.* $(15, 0, 0, 0, 0, 0)$*, protože*

$$15 = 15 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 50.$$

Jiná reprezentace je $(0, 0, 1, 1, 0, 0)$*, protože*

$$15 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 50.$$

Platí $\operatorname{cost}(15, 0, 0, 0, 0, 0) = 15$ *a* $\operatorname{cost}(0, 0, 1, 1, 0, 0) = 2$.

2.1 Použití minimálního počtu mincí

Má-li prodavačka vrátit 25Kč, pak je lepší dostat 20Kč a 5Kč než 25krát korunu.

Definujeme optimální reprezentaci částky n následovně. Pokud je součet $a_1+a_2\cdots+a_D$ v reprezentaci n minimální mezi všemi možnostmi, tedy podle zavedeného značení je minimalní $\text{cost}(a_1, a_2 \ldots, a_D)$, pak nazveme $(a_1, a_2 \ldots, a_D)$ *optimální reprezentací částky* n a značíme $\text{opt}(n, e_1, e_2, \ldots, e_D)$.

Příklad 2. *Optimální reprezentací částky* $25Kč$ *je* $\text{opt}(25; 1, 2, 5, 10, 20, 50) = (0, 0, 1, 0, 1, 0)$*, protože*

$$25 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 0 \cdot 50$$

a počet použitých mincí je $\text{cost}(\text{opt}(25; 1, 2, 5, 10, 20, 50)) = 2$*, tedy je evidentně nejnižší možný.*

2.2 Optimální systém mincí

Cílem je najít hodnoty mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ pro dané D tak, aby průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci byl minimální, tj. uvažujeme-li částky od 1 do N, pak chceme minimalitu

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\text{cost}(\text{opt}(n, e_1, e_2, \ldots, e_D)).$$

Příklad 3. *Pro koruny* $1, 2, 5, 10, 20, 50Kč$ *je průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci částek od* 1 *do* 100 *roven* $3,42$*. Se systémy mincí*

$$1, 4, 6, 21, 30, 37 \quad a \quad 1, 5, 8, 20, 31, 33$$

by to bylo $2,92$*, což je minimum pro* $D = 6$*. V praxi ovšem takové systémy mincí používat nelze, protože lidé neumí rychle zpaměti počítat s čísly jako je* 21 *a* 37*.*

2.3 Jakou minci přidat pro přiblížení optimalitě

Jakou jednu minci přidat, aby se co nejvíce snížil průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci? Tedy máme-li mince $e_1, e_2, \ldots, e_D$, jakou máme přidat minci e_{D+1}, aby byl minimální součet

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\text{cost}(\text{opt}(n, e_1, \ldots, e_D, e_{D+1}).$$

Příklad 4. *Pro koruny je nevýhodnější přidat* 33 *nebo* 37*, pak v systému* $1, 2, 5, 10, 20, 50, 33Kč$ *nebo* $1, 2, 5, 10, 20, 50, 37Kč$ *je průměrný počet použitých mincí v optimálních reprezentacích částek od* 1 *do* 100 *roven* $2,88$*.*

2.4 Optimalita a hladový algoritmus

Dále jsme zkoumali vztah mezi optimalitou a hladovým algoritmem v českém systému mincí. Vracení mincí v hodnotě n pomocí *hladového algoritmu* je založeno na použití maximálního možného počtu mincí s hodnotou e_D, který si označíme jako a_D. Nyní hledáme

nejvyšší hodnotu mince e_i, kde $i < D$, která je menší než $n - a_D e_D$ a celý postup opakujeme, dokud je $n - a_D e_D - a_i e_i - ...$ větší než nula.
Hladová reprezentace částky n je pak $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, označme ji jako hlad$(n, e_1, e_2, \ldots, e_D)$.
Hladová reprezentace částky 37 v českém systému mincí je hlad$(37; 1, 2, 5, 10, 20, 50) = (0, 1, 1, 1, 1, 0)$.

Příklad 5. *Pro české koruny* $1, 2, 5, 10, 20, 50 Kč$ *je hladová i optimální reprezentace libovolné částky od* 1 *do* 100 *stejná. Ovšem například pro systém mincí* $1, 7, 10$ *tomu tak není. Zatímco optimální reprezentace čísla* 15 *je* $(1, 2, 0)$, *hladová reprezentace téhož čísla je* $(5, 0, 1)$, *používá tedy větší počet mincí.*

2.5 Optimální systém mincí pro hladový algoritmus

Cílem tohoto systému je najít hodnoty mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ pro dané D tak, aby byl průměrný počet použitých mincí v hladové reprezentaci minimální.

Příklad 6. *Pro české koruny* $1, 2, 5, 10, 20, 50$ *je průměrný počet mincí pro hladovou reprezentaci částek od* 1 *do* 100 *roven* $3, 42$. *Optimální systémy pro* $D = 6$ *jsou*

$$\begin{gathered} 1, 2, 5, 11, 25, 62, \\ 1, 2, 5, 11, 25, 63, \\ 1, 2, 5, 13, 29, 64, \\ 1, 2, 5, 13, 29, 65. \end{gathered}$$

Průměrný cost *se pak sníží na* $3, 13$.

2.6 Zvýšení optimality hladového algoritmu přidáním další mince

Jakou minci můžeme do systému přidat, aby se placení hladovým algoritmem nejvíce přiblížilo optimalitě? Máme-li mince $e_1, e_2, \ldots, e_D$, hledáme takovou minci e_{D+1}, aby byl minimální součet

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \text{cost}(\text{hlad}(n, e_1, e_2, \ldots, e_D))$$

Příklad 7. *V českém mincovním systému se přidáním libovolné mince v hodnotě* $3 - 9$ *zmenší průměrný počet použitých mincí v hladovém algoritmu z* $3, 42$ *na* $3, 22$, *což je více než pro libovolné jiné hodnoty přidané mince.*

2.7 Omezení počtu mincí od každé hodnoty

Kromě efektivity posuzované podle počtu použitých mincí při transakci můžeme mít i jinou, kde musíme umět zaplatit všechny částky předem daným počtem mincí od každé hodnoty. Zjistili jsme, že u českých mincí nepřevyšuje počet potřebných mincí od každé hodnoty číslo 2. Existuje systém, kde by nám na zaplacení libovolné částky stačil pouze jeden kus od každé hodnoty? Jaký je minimální počet hodnot mincí v takovém systému, pokud se pohybujeme v částkách od 1 do 100? V jakém systému jsou všechny hodnoty mincí použitelné rovnoměrně?

3 Směna

Speciálním způsobem transakce je směna, kdy danou částku můžeme dát dohromady takovým způsobem, že zákazník platí a prodavač mu vrací. Reprezentace částky při směnné transakci je pak $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, kde oproti normální reprezentaci povolujeme i záporné hodnoty a_i, kde $i \in \{1, 2, \ldots, D\}$.

Příklad 8. *Díky možnosti směny se u českých mincí sníží průměrný počet použitých mincí z* $3,42$ *na* $3,08$*.*

4 Závěr

Z výše uvedených variant systémů mincí vyplývá, že najít fungující a v běžném životě vyhovující systém není vůbec jednoduché. Musíme brát ohledy na použití minimálního počtu mincí, celkový počet jednotlivých druhů, možnosti různých kombinací tak, aby nebylo nutné minci jednoho druhu používat mnohokrát, použitelnost hladového algoritmu. A v neposlední řadě také na jednoduchost počítání s mincemi.

S přihlédnutím k výše zmíněným měřítkům efektivity se zdá český systém obstojný a pro uživatele praktický.

Poděkování

Nakonec bychom chtěli poděkovat FJFI ČVUT za organizaci Týdne vědy a Ing. Ľubomíře Balkové, Ph.D., za vedení, inspiraci a pomoc s naším miniprojektem.

Reference

[1] M. Kleber, R. Vakil, and J. Shallit, *What this country needs is an* 18 *cent piece*, Mathematical Intelligencer **25(2)** (2003), 20–23