Výpočet obsahu plošných obrazců metodou Monte Carlo

O. Čajánek
Gymnázium U Balvanu 16, Jablonec nad Nisou
ondrej.cajanek@gmail.com

Z. Drázdová
Gymnázium Česká a Olympijských nadějí, České Budějovice
zdrazdova@gmail.com

F. Gašpar
Gymnázium Teplice
gasapar@seznam.cz

F. Stanislav
Purkyňovo Gymnázium Strážnice, Strážnice
fifelo33@seznam.cz

Abstrakt

Cílem našeho miniprojektu bylo pochopit využití stochastické metody Monte Carlo pro výpočet obsahu rovinných obrazců a aplikovat ji na několika odlišných příkladech.

1 Úvod

Základní myšlenka metody Monte Carlo je velice jednoduchá, chceme určit střední hodnotu veličiny, která je výsledkem náhodného děje. Vytvoří se počítačový model tohoto děje a po proběhnutí dostatečného množství simulací se mohou data zpracovat klasickými statistickými metodami.

V případě výpočtu plochy uvnitř křivky φ touto metodou je výše zmíněným náhodným dějem generování bodů s náhodnými souřadnicemi v oblasti (o známé ploše) v rovině, ve které φ leží. Sledovanou veličinou je poměr bodů uvnitř φ.

2 Princip výpočtu

Metoda je založena na jednoduchém statistickém principu. Do oblasti o známém obsahu, ve které je křivkou ohraničený obrazec, se náhodně umístí body. Poměr obsahu obrazce ku obsahu oblasti je přímo úměrný k počtu bodů v obrazci ku počtu všech bodů. Tedy

$$S_{\text{obrazec}} = \frac{N_{\text{obrazec}}}{N_{\text{celkem}}} S_{\text{celkem}}.$$

Význam symbolů:

- S_{celkem} – známý obsah oblasti
- N_{obrazec} – počet bodů v obrazci
- N_{celkem} – celkový počet bodů

Pro odhad kvality výpočtů určujeme střední kvadratickou odchylku σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(S_i - \overline{S})^2},$$

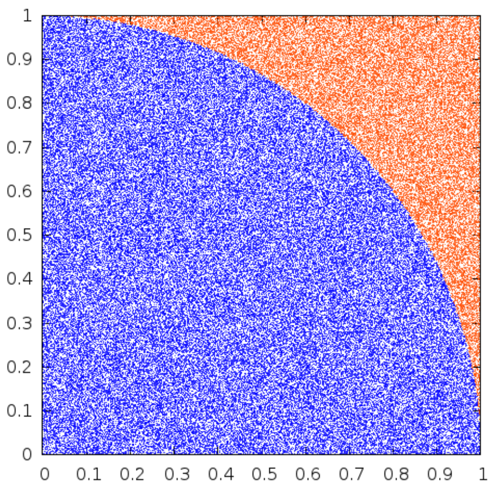
pomocí které je možné sledovat závislost přesnosti výpočtů na počtu N_{celkem}. Na základě teorie pravděpodobnosti je možné odvodit, že tato odchylka se chová jako $1/\sqrt{N_{\text{celkem}}}$, to znamená, že pokud N_{celkem} zvýšíme $100\times$, výpočet se zpřesní zhruba $10\times$.

3 Výpočty

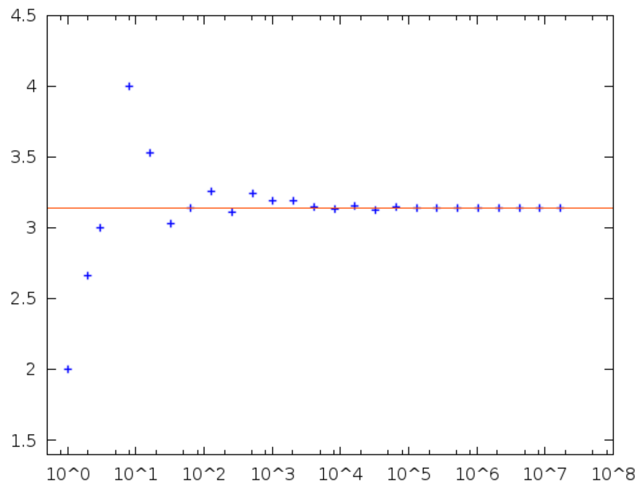
Naším úkolem bylo vypočítat obsah několika obrazců. Při seznamování s novou metodou je vhodné začít příkladem, kdy výsledek můžeme porovnat se známou hodnotou. Proto jsme v prvním příkladu určovali hodnotu π. V následující úloze jsme zvolili funkci, kde lze plochu určenou pomocí metody Monte Carlo porovnat s výsledkem jiného numerického postupu. Naším posledním úkolem bylo vypočítat obsah obrazce zadaného implicitní funkcí.

3.1 Výpočet čísla π

Pro přibližný výpočet π jsme vymezili čtverec o délce stran 1 a s počátkem souřadnic v levém dolním rohu. Do něj můžeme vepsat čtvrtkruh o poloměru $r = 1$ a středu $S = [0, 0]$ (na obrázku 1). Po vynásobení výsledku 4 dostáváme přibližný obsah kruhu, což lze porovnat s výpočtem $S = \pi r^2 = \pi$. Dále jsme mohli sledovat konvergenci výsledné hodnoty k π v závislosti na počtu náhodných bodů (na obrázku 2).



Obrázek 1: Výpočet π



Obrázek 2: Konvergence k π

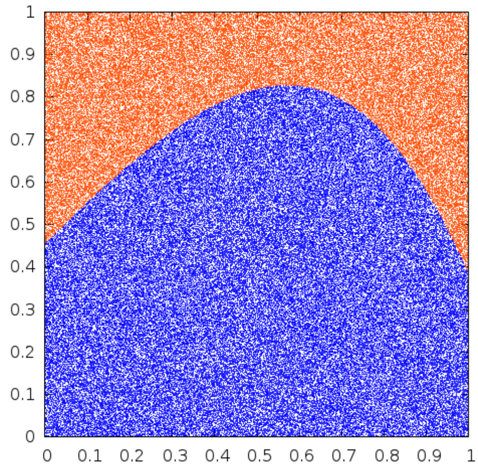
3.2 Výpočet plochy pod křivkou

V druhém příkladu jsme měli zadanou funkci

$$f(x) = \sin(e^x)\cos(e^{-x})$$

a počítali jsme obsah plochy pod touto křivkou na oblasti $\langle 0\,;1\rangle \times \langle 0\,;1\rangle$.

Metodu Monte Carlo jsme v tomto případě porovnali s obdélníkovou metodou. Ta spočívá v rozdělení osy x v dané oblasti na určitý počet kroků. Pro každý krok se vypočítá obsah $S = f(x)h$, kde $h = \frac{1}{n}$. Význam symbolů:



- h – velikost jednoho kroku
- n – počet kroků

Výsledný součet — tj. suma obsahů jednotlivých obdélníčků — se se vzrůstajícím počtem n blíží k celkovému obsahu.

Provedli jsme deset výpočtů a při každém jsme měnili počet bodů. Pro výsledné hodnoty jsme určili aritmetický průměr a směrodatnou (střední kvadratickou) odchylku.

Tabulka 1: Metoda Monte Carlo

počet bodů	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
výpočet 1	0,68400000	0,68400000	0,68831000	0,68708200	0,68754560
výpočet 2	0,70800000	0,69120000	0,68619000	0,68736700	0,68767570
výpočet 3	0,67700000	0,69060000	0,68788000	0,68720600	0,68738660
výpočet 4	0,69600000	0,69340000	0,68696000	0,68767100	0,68741620
výpočet 5	0,71000000	0,68590000	0,68729000	0,68752000	0,68744540
výpočet 6	0,67300000	0,69590000	0,68962000	0,68743300	0,68773260
výpočet 7	0,69900000	0,68410000	0,68726000	0,68697900	0,68738140
výpočet 8	0,67800000	0,69350000	0,68505000	0,68791800	0,68748770
výpočet 9	0,69400000	0,68710000	0,68745000	0,68765500	0,68759540
výpočet 10	0,67600000	0,68300000	0,68602000	0,68723900	0,68722440
arit. průměr	0,68950000	0,68887000	0,68720300	0,68740700	0,68748910
směr. odchylka	0,01299423	0,00438954	0,00121316	0,00027655	0,00014422

Tabulka 2: Obdélníková metoda

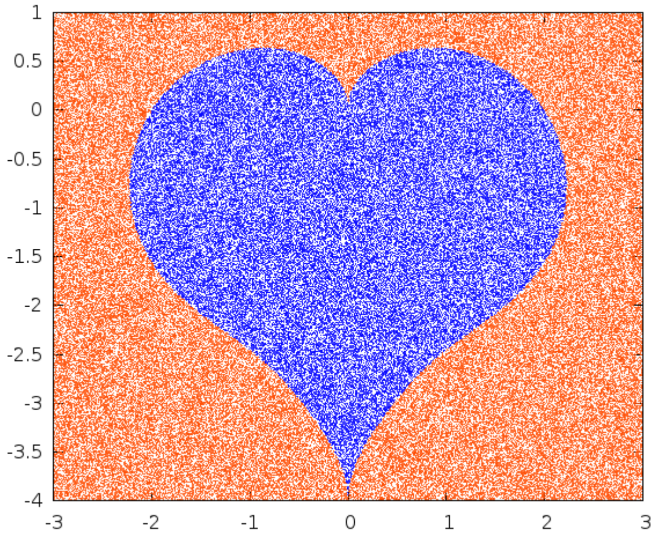
počet kroků	plocha
10	0,72662853
100	0,68777728
1000	0,68748308
10000	0,68748957
100000	0,68745186

Jak můžeme vidět z tabulek 1 a 3, obdélníková metoda je přesnější již při menším množství početních operací (obdélníků/bodů).

3.3 Výpočet plochy obrazce

Na závěr jsme zvolili implicitně zadanou funkci (1). Obsah obrazce, který vymezuje, není možné vypočítat ani analyticky, ani obdélníkovou metodou, proto je zde Monte Carlo jedinou možností.

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2+y^2} - 2y + \frac{y\sqrt{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1{,}4} \tag{1}$$



Tabulka 3: Obsah srdce

počet bodů	10^4	10^5	10^6	10^7
arit. průměr	12,5706	12,53493	12,521496	12,5233071
směr. odchylka	0,147847354	0,038840084	0,012094985	0,00483151

4 Závěr

Po pochopení principu metody Monte Carlo jsme jí úspěšně aplikovali na tři příklady. Podařilo se nám určit přibližnou hodnotu π a vypočítat obsah plochy implicitně zadané funkce. Avšak metoda není vždy tím nejvhodnějším způsobem výpočtu. Pro ilustraci, v příkladu 2 se ukázalo, že obdélníková metoda je přesnější a rychlejší než Monte Carlo.

Poděkování

Závěrem bychom chtěli poděkovat garantovi našeho miniprojektu Ing. Petru Ambrožovi, Ph.D. za vysvětlení principu metody Monte Carlo a následující obsáhlou pomoc s vypracováním.

Reference

[1] Miroslav Virius, Metoda Monte Carlo, České vysoké učení technické v Praze, 2010

[2] Wikipedia: Metoda Monte Carlo, http://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_Monte_Carlo [cit. 2013-06-18]