Soustavy logických rovnic

V. Menšíková, M. Holeček, P. Hájek, M. Gašová
Arcibiskupské gymnázium, mensikov@arcig.cz
Masarykovo gymnázium Plzeň, miroslav.holecek.188b@mgplzen.cz
SPŠ Třebíč, malykralevic@gmail.com
Gymnázium Budějovická, gasova.maky@gmail.com

Abstrakt

Náš projekt spočíval v pochopení, a především řešení jednoduchých logických rovnic. Základem bylo naučit se pracovat s Booleovou algebrou a převádět úlohy ze slovního zadaní do logických rovnic. Vyřešili jsme několik logických úloh a poté je řešili i pomocí programování.

1 Úvod

Cílem našeho miniprojektu bylo seznámení se se základy Booleovy algebry a její použití při řešení logických úloh. Chtěli jsme se naučit nejen řešit logické úlohy pomocí soustav lineárních nerovnic, ale také je počítat pomocí počítače.
Booleova algebra je algebraická struktura nad množinou $\{0, 1\}$. Používá logické proměnné, které mohou nabývat pouze hodnot 0 (nepravda) a 1 (pravda). Užívá dvě binární a jednu unární operaci. Konkrétně se jedná o logický součin, součet a negaci.

Booleova algebra	elektonika	ostatní	slovem
$A \wedge B$	$A\,B$	$\min(A, B)$	a zároveň
$A \vee B$	$A + B$	$\max(A, B)$	nebo
$\neg A$	$\overline{A}$	$1 - A$	negace

V tomto příspěvku budeme používat elektronikářské značení.
Převod dalších logických spojek do Booleovy algebry:

$$\begin{array}{ll} A \Rightarrow B & \overline{A} + B \\ A \Leftrightarrow B & AB + \overline{A}\,\overline{B} \end{array}$$

2 Zákony v Booleově algebře

Obě binární operace jsou komutativní a asociativní. Dle distributivního zákona platí
$(a + b) \cdot c = ac + bc$ a také $\;\; b + c = (a + c)(b + c)$.
Pro negaci složeného výroku se používají De Morganovy zákony: $\overline{a\,b} = \overline{a} + \overline{b}$ a $\overline{a + b} = \overline{a}\,\overline{b}$.
Dále pokud je nějaký součinový výraz pokrytý jiným, můžeme tento výraz vynechat. Tedy platí: $a + ab = a$
O dvou součinových výrazech A a B řekneme, že jsou kompatibilní, pokud v A existuje

právě jedna proměnná, jejíž negace je v B. Pokud jsou A a B kompatibilní, můžeme k výrazu přidat další člen, který vytvoříme tak, že z A i B odstraníme společnou proměnnou (a její negaci) a poté spolu upravené A a B vynásobíme. Tedy platí: $ax+b\overline{x} = ax+b\overline{x}+ab$

3 DNF a CNF

DNF značí součet základních součinů proměnných a poskytuje nám tedy seznam řešení. Tento seznam se také nazývá seznam prostých implikantů, který se dále dá využít i ve fuzzy logice. Oproti tomu CNF značí součin základních součtů proměnných a dává nám co nejmenší seznam pravidel.
Pro zjištění řešení se nám tedy nejvíce hodí tvar DNF. Jednoduchým trikem můžeme převést CNF na DNF jako: $\overline{\mathbf{CNF}} = \overline{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + ... + \overline{a_n} = \mathbf{DNF}$

4 Hornův tvar

Hornův tvar je výraz ve tvaru $a \Rightarrow c$. Příčiny jsou znázorněny pomocí proměnné a (antecedent) a následky jsou znázorněny proměnnou c (consequent). Příčiny mohou být složeny pomocí konjunkce a následky pomocí disjunkce. Tedy $a = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_p$ a $c = c_1 + c_2 + ... + c_q$ a a_i i c_i jsou proměnné bez negací.
Abychom získali z výrazu Hornův tvar, upravíme jej prvně na DNF, a poté negace převedeme na druhou stranu, čímž se jich zbavíme.
Hornův tvar je vhodný k vytvoření matic z daného problému, které se pak dají používat především v programování.
Z problému o n proměnných a m pravidlech vytvoříme matici $m \times n$. Pokud se proměnná v daném pravidle nenachází zapíšeme do příslušného políčka 0, pokud se jedná o příčinu zapíšeme 1 a jde-li o následek zapíšeme -1.

5 Česká přísloví

Mezi známá česká přísloví patří tyto dvě:

1. Kdo lže, ten krade.
2. Kdo nekrade, okrádá svou rodinu.

Zároveň, je zřejmé, že okrádání rodiny je také krádež. Když lhaní označíme jako L, okrádání jako K a okrádání rodiny jako R, dostáváme postupně tyto tři logické rovnice:

1. $L \Rightarrow K$
2. $\overline{K} \Rightarrow R$
3. $R \Rightarrow K$

5.1 Řešení pomocí soustavy rovnic

Rovnice upravujeme:

1. $\overline{L} + K$
2. $K + R$
3. $\overline{R} + K$

Soustavu dále řešíme:

$$(\overline{L} + K)(K + R)(\overline{R} + K) = (\overline{L} + K)(K\overline{R} + R\overline{R} + K + KR)$$

Člen K ve druhé závorce pokrývá členy $K\overline{R}$ a KR a zároveň $R\overline{R} = 0$ (protože nikdy nemůže platit výrok a zároveň jeho negace), dostáváme tedy:

$$(\overline{L} + K)K = \overline{L}K + K = K$$

Aby tedy byly pravdivé všechna tři předchzí tvrzení, musí $K = 1$.

5.2 Hornův tvar

První i třetí rovnice jsou již v Hornově tvaru a stačí tedy převést pouze druhou logickou rovnici. Tu můžeme upravit na tvar $1 \Rightarrow K + R$. Pomocí těchto pravidel již můžeme utvořit matici.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tuto matici můžeme použít jako vstup a program nám úlohu vyřeší.

6 Lodníci - řešení pomocí počítače (hrubou silou)

Na ostrově žijí pouze lodníci, kteří mluví vždy pravdu, a piráti, kteří vždy lžou.
Cizinec: „Kolik je mezi vámi lodníků?"
Odpověď A není slyšet.
Cizinec: „Co říkal A?"
B: „A říkal, že mezi námi je jediný lodník."
C: „Nevěřte B, ten lže!"
Co jsou B a C?
Lidé A, B a C jsou vždy buď pravdomluvní, nebo vždy lžou. Dohromady máme pouze 8 možností. Náš program každou možnost zkontroluje jestli splňuje zadání úlohy. Pokud ano, kombinaci vytiskne.

```
def f(vyrok, pravdivost_vyroku, r):
    return min(vyrok == pravdivost_vyroku, r)

def lodnici(v): #v[0]: A        v[1]: B        v[2] : C
```

```
    r = 1
    r = f((v[0]+v[1]+v[2]==1)==v[0], v[1], r)
    r = f(not(v[1]), v[2], r)
    if r:
        print(v)

def hruba_sila(func, lenght):
    for i in range(2**lenght):
        func([int(bin(i)[::-1][j]) if 2**j <= i else 0 for j
        in range(lenght)])

hruba_sila(lodnici, 3)

Vystup:
 A  B  C
[0, 0, 1]
[1, 0, 1]
```

Náš program našel všechna řešení. Člověk B tedy musí být jedině pirát, C je nutně lodník a A může být lodník i pirát.

7 Shrnutí

Naučili jsme se slovní zadání převést na logické rovnice. Povedlo se nám vyřešit několik logických úloh různými metodami - úvahou, soustavou logických rovnic, lineárními nerovnicemi a pomocí počítače. Počítač zvládne v rozumném čase projít mnohonásobně více možností, než bychom zvládli pouze s tužkou a papírem, ale musí se mu to umět správně zadat. Pomocí různých metod jsme si tak potvrdili svůj úsudek.

Poděkování

Chtěli bychom poděkovat našemu garantovi doc. Ing. Jaromíru Kukalovi, Ph.D., který nás seznámil se základy Booleovy algebry a řešením logických rovnic.

Reference

[1] SMULLYAN, Raymond M. Jak se jmenuje tahle knížka?. Přeložil Hanuš KARLACH, přeložil Antonín VRBA, ilustroval Karel AUBRECHT. Praha: Mladá fronta, 1986.

[2] RYBIČKA, Jiří. LATEX pro začátečníky. 3. vyd. Brno: Konvoj, 2003. ISBN 80-7302-049-1.

[3] BIRKHOFF, Garrett a Thomas BARTEE. Aplikovaná algebra. Bratislava: Alfa, 1981. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry.