PICKŮV VZOREC A JEHO APLIKACE

Barbora Janáčková, Michal Mládek, Kryštof Sedláček

Garant: Adam Blažek

20.6.2023

ABSTRAKT

V tomto článku se zabýváme problematikou Pickova vzorce a jeho aplikací do jiných odvětví matematiky. Konkrétně se budeme zabývat využitím Pickova vzorce v kombinatorice pro rozpočítání mincí různými způsoby.

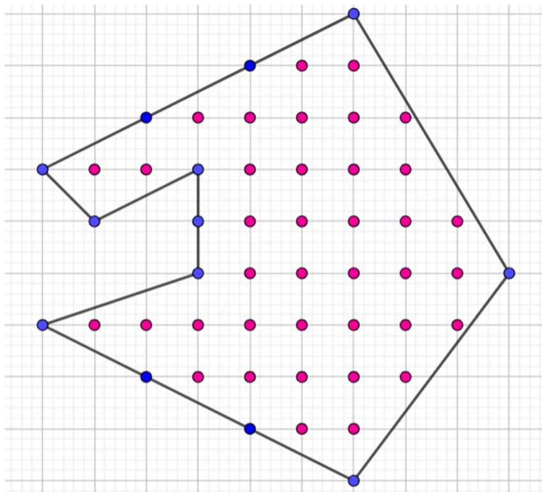
TEORETICKÁ ČÁST

Pickův vzorec se využívá pro výpočet mnohoúhelníku v mřížových bodech. Mřížové body jsou body v rovině, které mají v kartézské soustavě souřadnic celočíselné hodnoty. Pickova věta nám říká, že pokud máme libovolný mnohoúhelník, jehož strany se nekříží a nemá uvnitř žádnou díru, můžeme jeho obsah vypočítat pomocí jednoduchého vzorce $S = I + \frac{B}{2} - 1$, kde B jsou body nacházející se na stranách mnohoúhelníku, I je počet bodů ležících uvnitř mnohoúhelníku.

PŘÍKLAD VYUŽITÍ PICKOVA VZORCE:

Z obrázku 1 vyčteme, že B neboli počet modrých bodů na hranách je 13. I, počet růžových bodů uvnitř mnohoúhelníku, se rovná 38. Využijeme tedy Pickův vzorec

$$S = I + \frac{B}{2} - 1$$

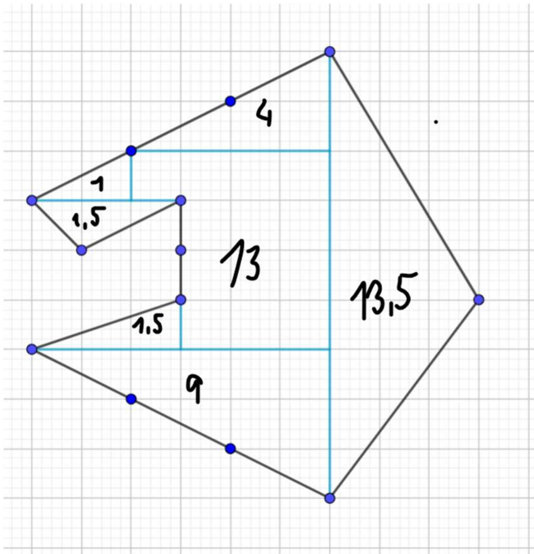


Obrázek 1: mnohoúhelník s body

$$S = 38 + \frac{13}{2} - 1 = 43{,}5\ j^2$$

(obrázek 2) Pokud si mnohoúhelník rozdělíme na menší části, jako jsou trojúhelníky, čtverce nebo obdélníky, dokážeme pomocí základních vzorců vypočítat obsah. Výsledný obsah zjistíme sečtením všech částí.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$$



Obrázek 2: rozdělený mnohoúhelník

Obsahy jednotlivých částí jsou vyznačeny v obrázku.

$$S = 1{,}5 + 1 + 4 + 13 + 13{,}5 + 9 + 1{,}5 = 43{,}5\ j^2$$

Porovnáním výsledků z obou částí zjistíme, že obsahy jsou stejné, ale je jednodušší a rychlejší využít Pickův vzorec.

PRAKTICKÁ ČÁST

Praktická část naší práce spočívala v aplikaci Pickova vzorce pro rozpočítání mincí. Mějme mince o hodnotách $n_1; n_2; n_3$ a celkovou částku c. Naším úkolem je zjistit, kolik existuje způsobů rozměnění mincí. Zároveň uvažujme, že jednotlivé mince dělí celkovou částku beze zbytku. Počet jednotlivých mincí lze zapsat rovnicí $x \cdot n_{2.} + y \cdot n_3 + z \cdot n_1 = c$. Graficky můžeme rovnici znázornit jako počet mincí x s hodnotou n_2; počet mincí y s hodnotou n_3 a počtem mincí z s hodnotou n_1. Zápis můžeme přenést do soustavy souřadnic, kde vznikne pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $x; y$ a přeponou spojující body [0;$\frac{c}{n_3}$] a [$\frac{c}{n_2}$;0], což jsou vrcholy trojúhelníku. Pod osou x a nalevo od osy y nemůže být zobrazena žádná hodnota, neboť neuvažujeme záporný počet mincí. Přepona trojúhelníku je hraniční, protože nám hranice (přepona) určuje maximální počet $x \cdot n_{2.} + y \cdot n_3$, kde $z = 0$. Na přeponě se objeví i „nemřížkové body“, které neuvažujeme, neboť chceme celé mince, nikoliv jejich části.

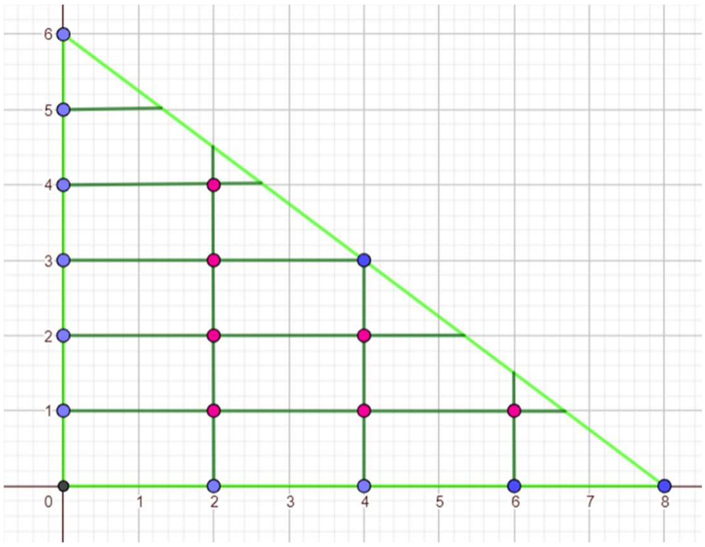
Body uvnitř trojúhelníku nedají po rozpočítání celou hodnotu c, nýbrž je třeba doplnit nejmenší hodnotu ($z \cdot n_1$) pro doplnění do c. Pokud zvolíme kombinaci $x; y$ tak, že na c pomocí $z \cdot n_1$ nelze doplnit, souřadnici neuvažujeme (*viz. obrázek, ve kterém se z čtvercové mřížky stala obdélníková*)

<u>Příklad:</u>

Pro tento konkrétní příklad (viz. obrázek) jsme využili hodnot:

$n_1 = 4;\ n_2 = 6;\ n_3 = 8;\ c = 48$

Z obrázku lze vyčíst počet bodů (B + I = **19**), což určuje celkový počet možností, jak mince o těchto konkrétních hodnotách rozdělit. Pro vyšší hodnoty vstupních parametrů může být „ruční" počítání bodů náročné, proto jsme experimentálně dospěli k vzorci:



$$\boldsymbol{B+I=\frac{c}{2\cdot n_1\cdot n_2\cdot n_3}\big(c\cdot nsd(n_1;n_2;n_3)+n_1\cdot nsd(n_2;n_3)+n_2\cdot nsd(n_1;n_3)+n_3\cdot nsd(n_2;n_1)\big)+1}$$

$B, I \in \mathbb{Z}$; označme B + I = počet všech možných kombinací čísel z, x, y, které splňují podmínku $zn_1 + xn_2 + yn_3 = C$, kde $n_3 > n_2 > n_1$ a $C \equiv 0 \pmod{n_1, n_2, n_3}$

Kvůli tomu, že $n_1 \mid C$, stačí najít počet všech x, y splňující podmínky $xn_2 + yn_3 \leq C \wedge xn_2 + yn_3 \equiv 0 \pmod{n_1}$, protože pro každe x, y bude právě jedno z takové, aby x, y, z splňovalo základní podmínku.

Mějme $\triangle \begin{pmatrix} \frac{C}{n_3} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C}{n_2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, všechny body ležící vně nebo na stranách trojúhelníku splňují podmínku $xn_2 + yn_3 \leq C$. Pokud určíme počet všech bodů s celočíselnými souřadnicemi náležících tomuto trojúhelníku, které zároveň splňují podmínku $xn_2 + yn_3 \equiv 0 \pmod{n_1}$, budeme mít hodnotu, kterou jsme si označili $B + I$, B je počet těchto bodů splňující zmíněnou podmínku a zároveň ležící na stranách trojúhelníku, I je počet bodů, opět splňující zmíněnou podmínku a zároveň ležící uvnitř trojúhelníku.

1) $B = B_x + B_y + B_c$ B_x - počet bodů se souřadnicí $y = 0$ kromě vrcholu $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C}{n_2} \end{pmatrix}$ B_y - počet bodů se souřadnicí $x = 0$ kromě vrcholu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ B_c - počet bodů se souřadnicemi kde $xn_2 + yn_3 = C$ kromě vrcholu $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C}{n_3} \end{pmatrix}$ Pro B_x platí že: $xn_2 \equiv 0 \pmod{n_1} \rightarrow x = k_x \frac{n_1}{nsd(n_1,n_2)}$ kde $k_x \in \mathbb{N}_0$

$yn_3 \geq 0 \wedge xn_2 + yn_3 \leq C \rightarrow k_x \frac{n_1}{nsd(n_1,n_2)} n_2 \leq C \rightarrow k_x \leq \frac{Cnsd(n_1,n_2)}{n_1 n_2} \rightarrow k_x \in \left\langle 0; \frac{Cnsd(n_1,n_2)}{n_1 n_2} \right\rangle \rightarrow B_x = \frac{Cnsd(n_1,n_2)}{n_1 n_2}$

Pro B_y obdobně platí, že $B_y = \frac{Cnsd(n_1,n_3)}{n_1n_3}$

Pro B_c platí, že $xn_2 + yn_3 = C$. Použijeme Bézoutovu větu, z podmínek víme, že n_2 a n_3 dělí C, takže rovnice má řešení a to ve tvaru $x_0 - k_c\frac{n_3}{nsd(n_2n_3)}, y_0 + k_c\frac{n_2}{nsd(n_2n_3)}$. Jedním řešením je zjevně $x_0 = 0, y_0 = \frac{C}{n_3}$, neboli všechna řešení budou ve tvaru $-k_c\frac{n_3}{nsd(n_2n_3)}, \frac{C}{n_3} + k_c\frac{n_2}{nsd(n_2n_3)}$, zároveň oboje řešení musí být nezáporné a proto $k_c \le 0 \wedge k_c \ge -\frac{Cnsd(n_2n_3)}{n_2n_3} \to k_c \in \left\langle -\frac{Cnsd(n_2n_3)}{n_2n_3}; 0 \right\rangle \to B_c = \frac{Cnsd(n_2,n_3)}{n_2n_3}$

Dostáváme tedy, že $B = \frac{Cnsd(n_1,n_2)}{n_1n_2} + \frac{Cnsd(n_1,n_3)}{n_1n_3} + \frac{Cnsd(n_2,n_3)}{n_2n_3}$

2) Z nedostatku místa a času tu není zapsán důkaz, který říká že obsah trojúhelníku se rovná $\frac{n_1}{nsd(n_1,n_2,n_3}(I + \frac{B}{2} - 1)$. Spočívá v vypočítání obsahu jedné mřížky pomocí vektorů a poté použití Pickova vzorce na mřížce zvětšené o $\frac{n_1}{nsd(n_1,n_2,n_3}$.

3)Je zřejmé, že obsah trojúhelníku s vrcholami $\begin{pmatrix} \frac{C}{n_3} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C}{n_2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bude $\frac{C^2}{2n_2n_3}$. Z už zmíněných důkazu dostáváme rovnost $\frac{C^2}{2n_2n_3} = \frac{n_1}{nsd(n_1,n_2,n_3}(I + \frac{B}{2} - 1)$, která lze přepsat do tvaru $B + I = \frac{C^2 nsd(n_1n_2n_3)}{2n_1n_2n_3} + \frac{B}{2} + 1$. Dosazením za B do levé strany a nám vyjde finální rovnost, která určuje počet všech možných kombinací čísel z, x, y

$$B + I = \frac{C^2 nsd(n_1n_2n_3)}{2n_1n_2n_3} + \frac{Cnsd(n_1,n_2)}{2n_1n_2} + \frac{Cnsd(n_1,n_3)}{2n_1n_3} + \frac{Cnsd(n_2,n_3)}{2n_2n_3} + 1$$

ZÁVĚR

V článku jsme se zabývali využitím Pickova vzorce v kombinatorice pro rozpočítání mincí. Experimentálně jsme došli k podobám vzorců, ze kterých po následných úpravách a ověřeních vzešel vzorec:

$$\boldsymbol{B + I = \frac{c}{2\cdot n_1\cdot n_2\cdot n_3}\left(c\cdot nsd(n_1;n_2;n_3) + n_1\cdot nsd(n_2;n_3) + n_2\cdot nsd(n_1;n_3) + n_3\cdot nsd(n_2;n_1)\right) + 1}$$

PODĚKOVÁNÍ

V rámci našeho článku bychom rádi poděkovali vedoucímu Adamu Blažkovi za pomoc se zpracováním tématu. Dále bychom rádi poděkovali FJFI za propůjčení prostorů k vypracování projektu a organizátorům Týdne vědy za možnost náhledu do vysokoškolského života.

CITACE

1) Holíková, Marie. „O Pickově vzorci a rozměňování peněz". Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 61, č. 4, 2016, s. 312–22. dml.cz, https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/145978.

2) pick [Mgr. Ivana Stefanová]. https://ivana.stdin.cz/pick. Viděno 20. červen 2023.

3) „Bézoutova rovnost". Wikipedie, 6. září 2019. Wikipedia, https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=B%C3%A9zoutova_rovnost&oldid=17624241.