

Počítačové algebraické systémy a jejich aplikace (nejen) ve fyzice

D. Novák¹, K. Prchal², A. Musilová³, A. Košťál⁴

Gymnázium Veľká okružná Žilina¹, Biskupské gymnázium Brno²,
Arcibiskupské gymnázium Praha³, Gymnázium Tišnov⁴

donnberg5@protonmail.ch¹, prchal.syn@gmail.com²,
musilova@arcig.cz³, sascha.kostal@gmail.com⁴

Abstrakt

Cieľom nášho miniprojektu bolo naučiť sa, ako fungujú počítačové algebraické systémy. Počítačový algebraický systém (skratka PAS, z anglického Computer algebra system, CAS) [1] je systém, ktorý dokáže efektívne a relatívne rýchlo riešiť algebraické problémy a príklady. Snažili sme sa pochopiť, ako pracovať s programom Wolfram Mathematica, aké má rôzne využitia a výhody oproti iným programom.

1 Úvod

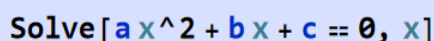
S postupom času a vývojom vedy a techniky sa problémy, ktorým čelíme vo vede a matematike stávajú čoraz zložitejšími, preto je nutné vyvíjať programy, ktoré by nám s tou kopou matematiky pomohli. Takéto programy alebo počítačové algebraické systémy sa začali vyvíjať ihneď po nástupe počítačov. Tieto programy využívajú rýchlosť spracovania dát a schopnosť tieto dáta efektívne použiť pri riešení daného problému.

Programov tohoto druhu existuje celá rada. My sme využívali pri práci program Wolfram Mathematica [2]. Tento program využíva k riešeniu zadaní programovací jazyk Wolfram. Wolfram je jediný programovací jazyk, ktorý využíva zátvorky typu „[]“ pre písanie argumentu funkcie (pr. Sin[x], Cos[x], ...).

2 Riešenie problémov

Základné matematické problémy, funkcie a rovnice

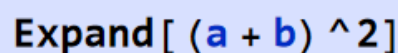
Začať môžeme s jednoduchými matematickými funkciami a rovnicami, ako sú napríklad mocninové funkcie (viz. Obr. 3), lineárne rovnice, kvadratické rovnice (viz. Obr. 1), grafy funkcií, úprava výrazov, základné matematické vzorce (viz. Obr. 2) a pod.



```
Solve[a x^2 + b x + c == 0, x]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \right\}$$

Obrázek 1 Kvadratická rovnica

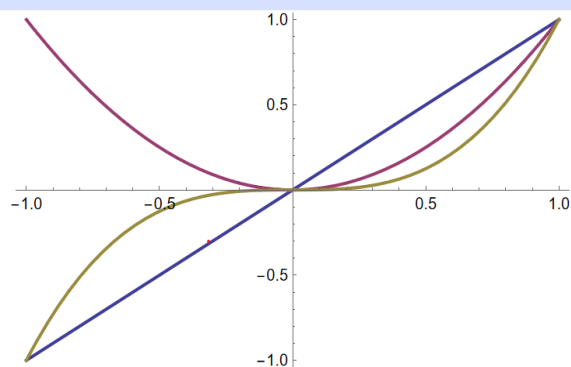


```
Expand[(a + b)^2]
```

$$a^2 + 2ab + b^2$$

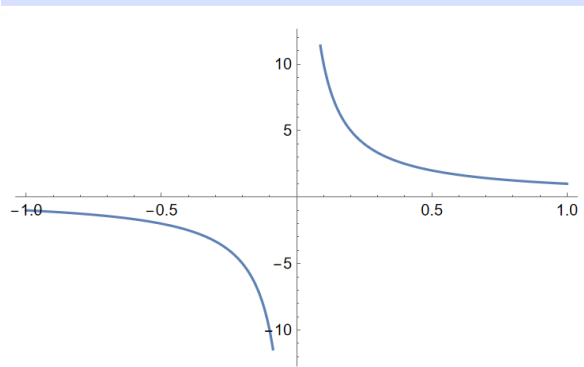
Obrázek 2

```
Plot[{x, x^2, x^3}, {x, -1, 1}, PlotStyle -> Thick]
```



Obrázek 3 Základné mocninové funkcie

```
Plot[{1/x}, {x, -1, 1}]
```

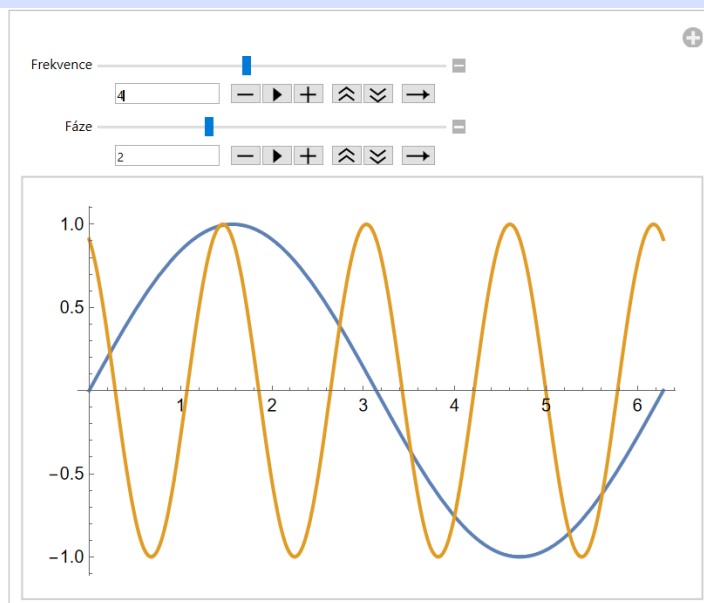


Obrázek 4 Nepriama úmernosť

Wolfram Mathematica sa dá využiť aj na zobrazovanie matematických funkcií z rôznych oblastí matematiky, ako napríklad goniometrické funkcie.

Základné goniometrické funkcie, ako sú sínus, kosínus, tangens, kotangens, ... sa dajú veľmi ľahko vyobraziť graficky aj s meniteľnými parametrami (viz. Obr. 5). Na obrázku 5 vidíme, že parametre a a b nám menia frekvenciu a fázu grafu.

```
Manipulate[Plot[{Sin[x], Sin[a x + b]}, {x, 0, 2 π}, PlotStyle -> Thick], {{a, 1, "Frekvencia"}, 1, 8}, {{b, 0, "Fáza"}, 0, 2 π}]
```



Obrázek 5 Funkcia sínus

Derivácie a integrácie

Mathematica nám umožňuje riešiť tiež derivácie a integrácie rôznorodých funkcií, ktoré vypadajú hrozivo a bývajú častokrát náročné a zdĺhavé.

```
D[a x^n + b x^(n - 1) + c, {x, 3}]
```

```
b (-3 + n) (-2 + n) (-1 + n) x^-4+n + a (-2 + n) (-1 + n) n x^-3+n
```

```
Integrate[1 / (1 - x^3), x]
```

```
ArcTan[ $\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$ ] -  $\frac{1}{3}$  Log[1 - x] +  $\frac{1}{6}$  Log[1 + x + x^2]
```

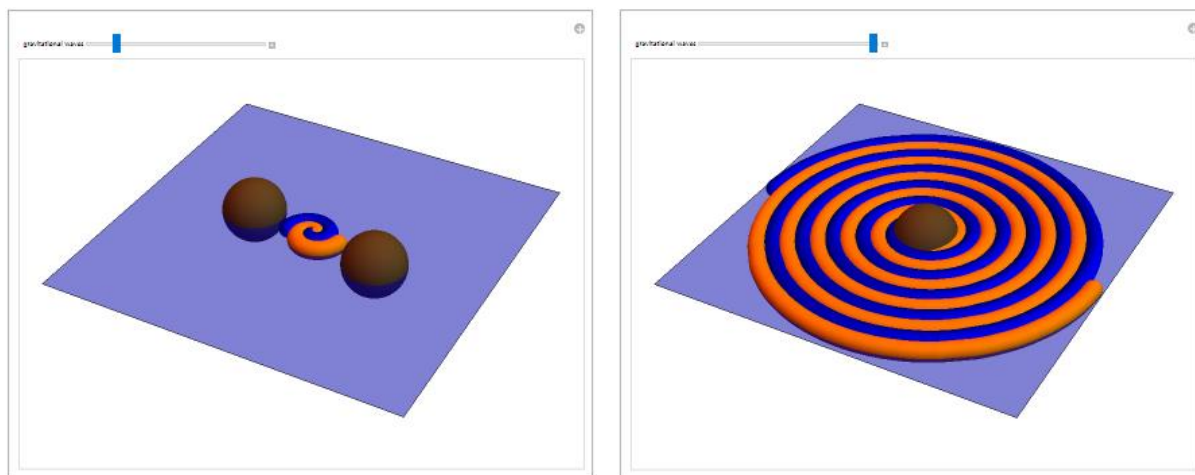
Obrázek 6 Derivácia a integrácia

3 Využitia PAS

Mathematica a iné programy neriešia len matematické rovnice, ale takisto majú praktické uplatnenie aj v ostatných vedách. Dokážeme pomocou nich vyobrazit' vedecké modely a jednoducho znázorniť náročné vedecké príklady a simulácie.

Fyzika

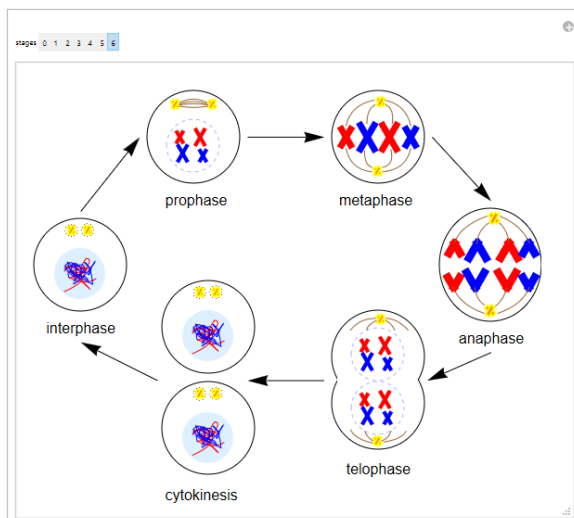
Zobrazovanie simulácií od jednoduchej mechaniky až po kvantovú fyziku a kozmológiu.



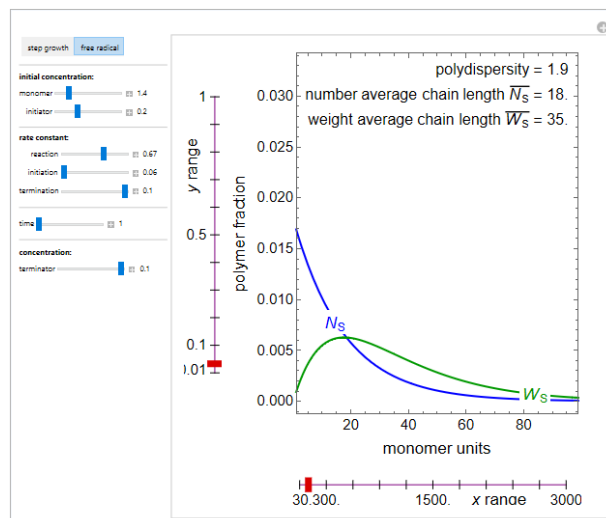
Obrázek 7 Gravitačné vlny emitované pri zrážke dvoch čiernych dier

Chémia

Od anorganickej a organickej chémie, zobrazovania rôznych prvkov a zlúčenín až po Marcusove teórie a termodynamické simulácie.



Obrázek 8 Bunkový cyklus



Obrázek 9 Polymerizácia vo vsádzkovom reaktore

Biológia

Evolúcia živočíchov, vývoj rastlín, simulácia rozpadov, bunkový cyklus... toto všetko dokážeme naprogramovať a simulovať vo Wolframe.

4 Shrnutí

Počítačové algebraické systémy sú naozaj veľkým uľahčením pri riešení matematických problémov. To, čo by nám ľuďom trvalo vypočítať celé hodiny, dni, týždne, mesiace... majú počítačové algebraické systémy vyrátané za pár chvíľ. S postupným pokrokom vo vede a technike vyriešime viac a viac problémov, ale takisto nám aj viac a viac problémov pribudne, ale s vylepšovaním programov a nástrojov na riešenie takýchto problémov ich dokážeme riešiť lepšie a efektívnejšie.

Poděkování

Naša vďaka patrí Dr. Ing. Milanovi Šiňorovi, ktorý nás zasvätil do základov v pracovaní s programom Wolfram Mathematica a pri pomoci s miniprojektom, a tiež všetkým organizátorom Týždňa vedy na Jaderce.

Reference

- [1] Wikipedia. *Počítačový algebraický systém*. https://cs.wikipedia.org/wiki/Po%C4%8D%C3%ADta%C4%8Dov%C3%BD_algebraick%C3%BD_syst%C3%A9m. 2021.
- [2] Wikipedia. *Wolfram Mathematica*. https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Mathematica. 2023.