Rostou racionální čísla na stromech?

M. Drexlerová[1], L. Létal[2], M. L. Skuda[3]

Gymnázium Rožnov pod Radhoštěm[1], Gymnázium Boskovice[2],
Gymnázium Jakuba Škody[3]

Abstrakt

Práce se zabývá kladnou částí oboru racionálních čísel, její reprezentací pomocí Calkin-Wilfova stromu, důsledky, které z této reprezentace výplývají, a také aplikacemi, jež tento binární strom má.

1 Úvod

Racionální čísla jsou taková čísla, která lze zapsat do tvaru zlomku, jenž má ve jmenovateli i čitateli celé číslo. Dohromady tvoří množinu racionálních čísel. Tuto množinu je třeba vhodně reprezentovat, abychom mohli ověřovat a zkoumat její vlastnosti. Tímto problémem se mimo jiné zabýval i matematik Stern a duo Calkin a Wilf. Ve zbytku práce prozkoumáme poznatky plynoucí z Calkin-Wilfova binárního stromu.

2 Obecné poznatky k teorii množin

2.1 Mohutnost

U všech množin můžeme určit mohutnost. U konečných množin mohutnost představuje prostý počet jejích prvků. V 19. století ji německý matematik G. Cantor zavedl i u množin nekonečných. Nejméně mohutné nekonečné množiny mají mohutnost rovnou $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Tuto mohutnost má nejen množina přirozených čísel, ale i všechny další množiny, na nichž můžeme z $\mathbb{N}$ provést bijekci. Množiny tohoto charakteru poté nazýváme spočetnými a patří do nich, ačkoliv se to zdá nepravděpodobné, i čísla racionální.

2.2 Bijekce

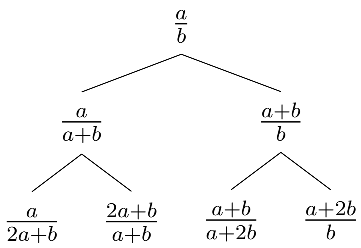
Bijekce je vzájemně jednoznačné zobrazení, tj. mějme dvě množiny A, B. Je-li možno ke každému prvku z množiny A jednoznačně přiřadit právě jeden protějšek z množiny B tak, že každý prvek v množině B bude přiřazen právě jednou, pak lze provést mezi těmito množinami bijekci. U konečných množin je nutným parametrem shodný počet prvků v množině, u množin nekonečných se v našem kontextu bavíme o schopnosti libovolnou nekonečnou množinu indexovat pomocí čísel z $\mathbb{N}$.

3 Reprezentace racionálních čísel

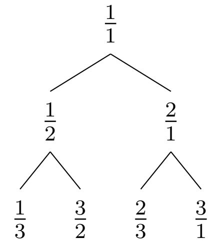
Bijekci mezi racionálními a přirozenými čísly můžeme znázornit pomocí vizuálního zápisu množiny – dvěma často užívanými postupy jsou Cantorova diagonální metoda (tabulka 1) a Calkin-Wilfův strom, z nichž druhý zmíněný považujeme pro naše účely za lepší. Na obr. 1 níže je vyobrazený obecný předpis pro tento strom platící pro jakýkoliv rodičovský zlomek $\frac{a}{b}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. Na obr. 2 jsou poté první 3 patra stromu.

m/n	1	2	3	...
1	$1/1$	$2/1$	$3/1$	...
2	$1/2$	$2/2$	$2/3$	...
3	$1/3$	$2/3$	$3/3$	...
...	...	...	...	...

Tabulka 1



Obrázek 1



Obrázek 2

4 Vlastnosti Calkin-Wilfova stromu

Jelikož výše tvrdíme, že Calkin-Wilfův strom je vhodnou reprezentací racionálních čísel, je na místě prokázat, že tomu tak skutečně je. V této sekci si tedy nejprve dokážeme, že strom skutečně obsahuje všechna racionální čísla, poté prokážeme, že se žádná čísla uvnitř stromu neopakují, a konečně si ověříme, že všechny zlomky uvnitř stromu jsou opravdu v základním tvaru.

Věta 1. *C-W strom obsahuje všechna racionální čísla.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí na $r + s$. Prvním krokem je $r + s = 2$, což platí pro zlomek $\frac{1}{1}$, který ve stromu jistě obsažený je. Nyní vezmeme libovolný zlomek ve tvaru $\frac{r}{s}$, kde $r, s \in \mathbb{N}$. Ten (ze znalosti předpisu stromu) vznikl buď z uzlu $\frac{r-s}{s}$ pro $r > s$ nebo $\frac{r}{s-r}$ pro $s > r$. Z indukčního předpokladu oba tyto zlomky ve stromu budou obsaženy, protože $r < r + s$ i $s < r + s$. Z toho plyne, že i zlomek $\frac{r}{s}$ bude ve stromě obsažen. □

Věta 2. *Všechny členy C-W stromu jsou v základním tvaru.*

Důkaz. Důkaz opět provedeme pomocí indukce tak, že ukážeme, že r, s libovolného zlomku $\frac{r}{s}$ z C-W stromu musí být nesoudělné. Tato skutečnost platí u prvního zlomku $\frac{1}{1}$. Z indukčního předpokladu plyne, že libovolný zlomek $\frac{r}{s}$ je v základním stavu, a jeho potomci, kteří mají tvar $\frac{r+s}{s}$ a $\frac{r}{r+s}$, jsou tedy zřejmě také v základním tvaru. □

Věta 3. *Uvnitř C-W stromu se žádné zlomky neopakují.*

Důkaz. Provedeme přímý důkaz, který vychází z předpokladu, že jsou všechny zlomky v základním tvaru (což bylo dokázáno) a že mezi čísly ve stromě není nulový prvek. Tím pádem musí platit: $r + s \neq r \neq s$ a z předpisu stromu platí, že stejné $r + s$ je vždycky v právě jednom čitateli a v právě jednom jmenovateli, pokaždé s jiným číslem (r, nebo s). Tím dokazujeme unikátnost každého zlomku. □

5 Operace s Calkin-Wilfovým stromem

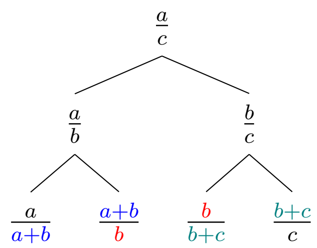
V C-W strom má několik pozoruhodných vlastností, které přímo vyplývají ze způsobu, jakým roste, a lze je matematicky popsat pomocí základních principů stromu a racionálních čísel.

5.1 Řazení čísel v patře

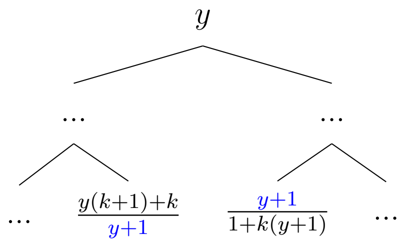
Nejprve si ukážeme způsob, jakým podle velikosti seřadit zlomky v konkrétní vrstvě stromu. Ze stavby stromu víme, že prvky v levé větvi jsou vždy menší než v pravé. Proto bude v pořadí záležet, na které větvi čísla jsou. Nejmenší prvek bude tedy nejvíce vlevo. Další bude nejvíce vlevo, ale v pravé polovině stromu. Takto budeme střídat strany, dokud se nedostaneme až k prvku nejvíce napravo, který je z řádku nejvyšší.

5.2 Návaznost čitatele a jmenovatele

Dále si ukážeme, že čísla ve jmenovateli jednoho členu a v čitateli následujícího členu jsou stejná.
Pro čísla ve stejné větvi to vyplývá ze samotné definice stromu. Pro vedlejší větve to nemusí být tak očividné. Jako důkaz poslouží obr. 3, kde začneme libovolným zlomkem $\frac{a}{c}$. Pro následující patra vidíme, že rovnost také vyplývá z předpisu, tudíž máme návaznost dokázanou (obr. 4 tvrzení dokazuje pro libovolné patro).



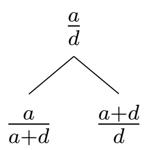
Obrázek 3



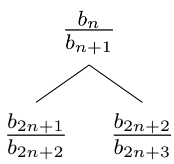
Obrázek 4

5.3 Sternova diatomická posloupnost

Vezmeme-li všechna čísla obsažená v Calkin-Wilfově stromě, hodnota jejich čitatelů nám tvoří Sternovu posloupnost $b_n = 1, 1, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 1\dots$ Ze zápisu stromu pomocí obecného předpisu (obr. 5) a členů posloupnosti (obr. 6) vyplývají 3 rovnice (níže je příklad pro $n = 6$, tedy $2n + 1 = 13$), pomocí kterých jsme schopni posloupnost od základního členu popsat.



Obrázek 5



Obrázek 6

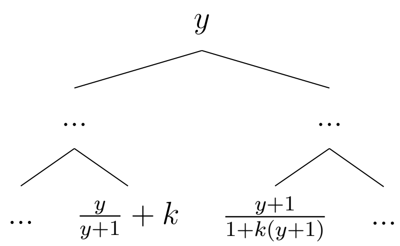
$$b_n = b_{2n+1}$$
$$b_{n+1} = b_{2n+3}$$
$$b_{2n+2} = b_{n+1} + b_n$$

Navíc existuje speciální posloupnost, která má stejné členy (a tedy splňuje stejný předpis). Tato posloupnost udává pro n-tý člen počet možných rozkladů čísla n na sčítance mocnin 2 tak, že každá mocnina se v rozkladu vyskytne nejvýše dvakrát.

$$
\begin{aligned}
n = 6 \to b_n &= 3 & \qquad n = 13 \to b_n &= 3 \\
6 &= 2^2 + 2^1 & 13 &= 2^3 + 2^2 + 2^0 \\
6 &= 2^1 + 2^1 + 2^1 & 13 &= 2^3 + 2^1 + 2^1 + 2^0 \\
6 &= 2^2 + 2^0 + 2^0 & 13 &= 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^0
\end{aligned}
$$

5.4 Následující zlomek

Z posloupnosti rovněž vyplývá předpis fuknce udávající následující zlomek. Ten využívá počet pater k, které jsou mezi daným zlomkem a uzlem, který má společný s následujícím zlomkem.



Obrázek 7

V čísle $x = \frac{y}{y+1} + k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$, máme celou část $\lfloor x \rfloor = k$ a zlomkovou část $\{x\} = \frac{y}{y+1}$ (zbytek získaný po odečtení dolní celé části). Sousední zlomek lze upravit na $\frac{1}{k+1-\frac{y}{1+y}}$ a následně ho vyjádříme pomocí $\lfloor x \rfloor$ a $\{x\}$. Dostaneme tak funkci $f(x)$, ta každému zlomku přiřadí následující: $f(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\}}$.

6 Závěr

Úspěšně jsme se seznámili s problematikou Calkin-Wilfovova stromu a zdárně jsme vypracovali důkaz jeho použitelnosti pro případ racionálních čísel. Mimo to se nám rovněž podařilo nalézt a dokázat některé další zajímavé vlastnosti C-W stromu.

Poděkování

Ve jménu našeho týmu tímto děkujeme naší vedoucí Veronice Hendrychové za vedení projektu a zajímavý vhled do výše zpracované problematiky.

Reference

[1] HENDRYCHOVÁ, Veronika. *Calkin-Wilfův strom a jeho vlastnosti* [Přednáška]. ČVUT v Praze: 19. června 2023

[2] AIGNER, Martin a Gunter M. ZIEGLER. *Proofs from THE BOOK*. 6th ed. 2018. Imprint: Springer, 2018. ISBN 9783662572658.