Jak chladne vesmír aneb Pečení sférického krocana

T. Kyselová[1], J. Novák[2], P. Sluka[3],
FJFI ČVUT, Břehová 78/7
tereza.kyselova@gymnp.cz[1],novakjan@tutanota.com[2], petr@sluka.cz[3]

20. června 2023

Abstrakt

Ve vesmíru existuje řada jevů způsobujících chladnutí, resp. zahřívání objektů. Tento miniprojekt se zabývá aplikací rovnice vedení tepla na problematiku pečení tzv. sférického krocana jako určitého teoretického modelu a verifikací empiricky stanovené Panofskyho konstanty umožňující výpočet doby pečení s nelineární závislostí na jeho hmotnosti. Výsledky jsou zpracovány analyticko-numerickými metodami v programu Wolfram Mathematica. Text je sázen v publikačním systému LaTeX.

1 Úvod

Šíření tepla

Všechny objekty ve vesmíru chladnou, resp. se zahřívají v důsledku změny své vnitřní energie, která se realizuje v podobě uvolňování, resp. přijímání tepla. V principu rozlišujeme 3 způsoby jeho šíření - prouděním, zářením a vedením.

Šíření tepla prouděním odpovídá makroskopickému pohybu mediální tekutiny a popisuje se pomocí transportních rovnic v mechanice kontinua. Šíření tepla zářením odpovídá přenosu energie prostřednictvím elektromagnetických vln a popisuje se pomocí Maxwellových rovnic. Šíření tepla vedením je způsobeno oscilacemi v krystalické mřížce vodivého prostředí a popisuje se rovnicí vedení tepla. V tomto miniprojektu se omezíme na tento 3. způsob, tj. šíření tepla vedením.

Rovnice vedení tepla

Fourierův zákon pro 3D neustálené vedení tepla v isotropním nehomogenním prostředí se součinitelem tepelné vodivosti $\lambda(\vec{r})$ definuje obecně vektorové pole hustoty tepelného toku $\vec{\varphi}(\vec{r},t) = -\lambda(\vec{r})\nabla u(\vec{r},t)$, kde $\vec{r} = (x,y,z)$ označuje polohový vektor kartézských souřadnic a $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ je operátor nabla.

V homogenním isotropním prostředí charakterizovaném součinitelem tepelné vodivosti $\lambda = konst.$, měrnou tepelnou kapacitou $c = konst.$ a objemovou hustotou $\rho = konst.$ lze z Fourierova zákona pro daný element objemu odvodit rovnici vedení tepla s danými okrajovými a počátečními podmínkami pro neznámou funkci teploty $u = u(\vec{r},t)$ ve tvaru

$$\frac{\lambda}{c\rho}\nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{c\rho} = 0, \tag{1}$$

kde $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ je Laplaceův operátor a $P = P(\vec{r}, t)$ je měrný tepelný výkon zdrojů nebo ztrát tepla v prostředí.

V případě sférické symetrie lze působení Laplaceova operátoru na funkci $u(r,t)$ zapsat jako $\nabla_s^2 u(r,t) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ představuje sférický poloměr. Okrajová počáteční úloha bez zdrojů $P = 0$ lze pro sféricky symetrický případ v rámci objektu poloměru R formulovat pomocí rovnice vedení tepla ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad k = \frac{\lambda}{c\rho} \tag{2}$$

s okrajovou podmínkou pro teplotu u_R na povrchu $r = R$, resp. počáteční podmínkou pro teplotu u_0 v čase $t = 0$ ve tvaru

$$u(R,t) = u_R, \quad t > 0, \quad u(r,0) = u_0, \quad 0 < r < R. \tag{3}$$

2 Pečení sférického krocana

V této části se pokusíme částečně zreprodukovat a kriticky zhodnotit výsledky obsažené v pracích [1] a [2] s důrazem na použití výhradně metrické soustavy jednotek - kilogramy (kg), metry (m) a stupně Celsia (°C) místo soustavy imperiální [3] - libry (lb), palce (in) a stupně Fahrenheita (°F), tj. používáme převodní vztahy

$$1\,\mathrm{lb} = 0,45\,\mathrm{kg}, \quad 1\,\mathrm{in} = 0,025\,\mathrm{m}, \quad {}^\circ\mathrm{C} = \frac{5}{9}\left({}^\circ\mathrm{F} - 32\right). \tag{4}$$

Panofskyho vzorec

Na základě teoretického modelu v rámci sférické symetrie krocana se pokusíme verifikovat nelineární Panofskyho vzorec pro dobu jeho pečení

$$t_P = \frac{M^{\frac{2}{3}}}{P_e}, \tag{5}$$

kde M je hmotnost krocana a P_e je empiricky stanovená Panofskyho konstanta, kterou lze pro naše účely zapsat v metrických jednotkách jako

$$P_e = 1,5\,\mathrm{lb}^{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{h}^{-1} = 0,88\,\mathrm{kg}^{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{h}^{-1}. \tag{6}$$

Škálovací symetrie

S využitím škálovací symetrie

$$(r,t) \mapsto (s,\tau) = (a\,r, b\,t), \tag{7}$$

lze ukázat, že pro hodnotu $b = a^2$ zůstává rovnice vedení tepla (1) invariantní, tj. platí stejné vnitřní podmínky. Pro různé hmotnosti krocana M_1 a M_2 s odpovídajícími dobami pečení t_1 a t_2 odtud za těchto neměnných podmínek plyne vztah

$$\frac{M_1^{\frac{2}{3}}}{t_1} = \frac{M_2^{\frac{2}{3}}}{t_2} =: P, \tag{8}$$

který v principu umožňuje definovat Panofskyho konstantu P. Dle práce [1] pak pro hodnoty $M_1 = 4,5\,\mathrm{kg}$ a $t_1 = 4\,\mathrm{h}$ dostaneme

$$P_1 = \frac{M_1^{\frac{2}{3}}}{t_1} = 0,68\,\mathrm{kg}^{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{h}^{-1}, \tag{9}$$

což příliš empirické hodnotě (6) neodpovídá.

Analytické řešení

Řešení okrajové počáteční úlohy (2) a (3) lze podle [1] nalézt metodou separace proměnných v analytickém tvaru nekonečné funkční řady

$$u(r,t) = \lim_{N\to+\infty} u_N(r,t) \tag{10}$$

v rámci N-té aproximační funkce

$$u_N(r,t) = u_R + \frac{2R(u_0 - u_R)}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{\sin \frac{n\pi r}{R}}{r} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{R^2} t\right), \quad N \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Výsledky z 1. aproximační funkce

Podobně jako v práci [2] lze pro nejhrubší odhad $N = 1$ použít 1. aproximační funkci

$$u_1(r,t) = u_R + \frac{2R(u_0 - u_R)}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi r}{R}}{r} \exp\left(-\frac{\pi^2 k}{R^2} t\right), \tag{12}$$

která umožňuje explicitně vyjádřit finální čas doby pečení

$$t_f = \alpha \ln \frac{2\beta(u_R - u_0)}{u_R - u_f}, \quad \alpha = \frac{R^2}{\pi^2 k}, \quad \beta = \frac{\sin \frac{\pi r_f}{R}}{\frac{\pi r_f}{R}} \quad k = \frac{\lambda}{c\rho} \tag{13}$$

pro požadovanou referenční teplotu $u_f = u_1(r_f, t_f)$ odpovídající optimální teplotě na referenčním poloměru r_f. Odtud lze dále v analogii se vztahem (8) určit pro hmotnost $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ teoretickou predikci pro Panofskyho konstantu ve tvaru

$$P = \frac{M^{\frac{2}{3}}}{t_f} = \frac{\lambda}{c} \left(\frac{16\pi^8}{9\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\ln \frac{2\beta(u_R - u_0)}{u_R - u_f}}, \quad \beta = \frac{\sin \frac{\pi r_f}{R}}{\frac{\pi r_f}{R}}. \tag{14}$$

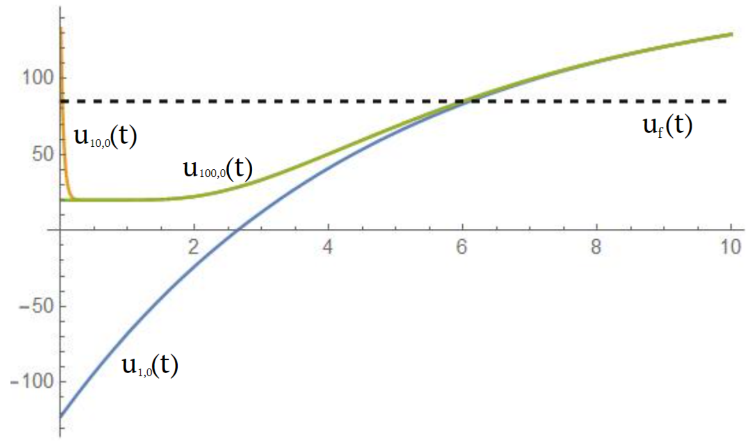
Pro $r_f = 0$ je limitně $\beta = 1$, čímž sice úspěšně zreprodukujeme obecný vztah z práce [2], ale s odlišnou číselnou hodnotou pro totožná vstupní data dle Tabulky 1, tj.

$$P_2 = \frac{\lambda}{c} \left(\frac{16\pi^8}{9\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\ln \frac{2(u_R - u_0)}{u_R - u_f}} = 0.99\,\mathrm{kg}^{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{h}^{-1} \neq 0.68\,\mathrm{kg}^{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{h}^{-1}, \tag{15}$$

což pravděpodobně naznačuje chybu v práci [2].

u_0 [°C]	u_f [°C]	u_R [°C]	λ [$\mathrm{J \cdot m^{-1}K^{-1}h^{-1}}$]	c [$\mathrm{J \cdot kg^{-1}K^{-1}}$]	ρ [$\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$]
20	85	163	1 800	3 530	1 050

Tabulka 1: Vstupní data dle [2]



Obrázek 1: Graf aproximačních funkcí pro $N \in \{1; 10; 100\}$

3 Závěr

V programu Wolfram Mathematica jsme vykreslili aproximační funkce pro $N \in \{1; 10; 100\}$ v rámci referenčního poloměru $r_f = 0$, přičemž jednotlivé křivky odpovídají funkci

$$u_{N,0}(t) = \lim_{r \to 0} u_N(r, t), \tag{16}$$

jejichž graf lze nalézt na Obrázku 1.

Pro nízká N je nepřesnost výrazná, ale jen kolem počáteční podmínky u_0. Všechny křivky se protnou s u_f v přibližně stejném bodě $t_f = 6\,\mathrm{h}$ odpovídající optimální době pečení pro zvolený poloměr $R = 0,15\,\mathrm{m}$ se zanedbatelnou odchylkou, což implikuje, že bod t_f je v dostatečné vzdálenosti od počátku, aby pro praktické účely nezáleželo na hodnotě N.

Poděkování

Děkujeme organizátorům Týdne vědy na Jaderce za možnost zúčastnit se miniprojektu a hlavně Ing. Filipovi Petraskovi, Ph.D za odbornou pomoc a teoretický úvod do problematiky vedení tepla.

Reference

[1] R. L. Herman. *Baking a Spherical Turkey.* [online]

[2] Y. Jin, L. R. Wang, and J. J. Wang. *Physics in turkey cooking: Revisit the Panofsky formula.* [online]

[3] Wikipedia. Imperial units. [online]