

Fraktály

Ondřej Bouchala, George Dzhanezashvili, Viktor Skoupý

19.6.2012

Abstrakt

Tato práce se zabývá vlastnostmi a vykreslováním fraktálů. Popisuje fraktální dimenzi (soběpodobnostní a mřížkovou), dále fraktály v komplexní rovině (Juliova a Mandelbrotova množina) a iterované fraktály (Kochova vločka, Sierpinského těsnění). Také se zabývá počítačovým zobrazováním fraktálů.

1 Úvod

Fraktály samy o sobě jsou nesmírně zajímavé objekty, které jsou charakteristické několika věcmi: obsahují nekonečně mnoho svých zmenšených kopií, každý z nich je jedinečný a liší se od ostatních. Jejich nejviditelnější předností je fascinující a složitá krása.

Fraktál je (zjednodušeně) definován jako geometrický objekt, který má následující vlastnosti:

- Je soběpodobný — znamená to, že pokud daný útvar pozorujeme v jakémkoliv měřítku či rozlišení, pozorujeme stále se opakující určitý charakteristický tvar,
- má na první pohled velmi složitý tvar, ale je generován opakovaným použitím jednoduchých pravidel.

Termín fraktál použil poprvé matematik Benoît Mandelbrot v roce 1975. Pochází z latinského fractus – rozbitý

2 Fraktální dimenze

Fraktální dimenze umožňuje popsat stupeň složitosti objektu podle toho, jak rychle roste jeho délka, obsah či objem v závislosti na velikosti měřítka, při kterém měříme. Existuje několik forem této dimenze:

- soběpodobnostní dimenze
- mřížková dimenze

2.1 Soběpodobnostní dimenze

Tento typ fraktální dimenze lze aplikovat pouze na struktury, které jsou ryze soběpodobné (úsečka a její části, čtverce v čtverci, krychle v krychli). Řekneme, že nějaká struktura je ryze soběpodobná, pokud ji lze rozdělit na několik částí, kde každá z těchto částí je

zmenšená kopie celku. Dimenze je pak určena na základě znalosti faktoru zmenšení (s) a počtu částí (a). (Např. do úsečky se vejdu dvě části s poloviční velikostí, do čtverce se vejdu čtyři s poloviční velikostí, ...). Vztah pro dimenzi D je:

$$D = \frac{\ln a}{\ln \frac{1}{s}}$$

2.2 Mřížková dimenze

Oproti dimenzi soběpodobnosti, která je definována pouze pro ryze soběpodobné útvary, lze dimenzi mřížkovou aplikovat na libovolný útvar. Přeš fraktál si nakreslíme čtvercovou síť $s \times s$ čtverečků a spočítáme, v kolika z nich fraktál leží – $N(s)$. Hledaná dimenze je pak rychlost růstu (derivace) $\ln(N(s))$ v závislosti na $\ln(s)$.

3 Typy fraktálů

3.1 Juliovy množiny

Juliovy množiny jsou množiny komplexních čísel z_0 , pro které platí, že posloupnost

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

nediverguje. Komplexní konstanta c je stejná pro celou množinu. Hranice těchto množin na komplexní rovině tvoří fraktál. Protože můžeme zvolit konstantu c libovolně, existuje nespočetně mnoho těchto množin.

3.1.1 Prahový poloměr divergence

Při počítačovém zobrazování nemáme k dispozici nekonečný počet iterací, ale lze dokázat, že pokud absolutní hodnota čísla z_n překročí danou prahovou hodnotu $r(c)$ závislou na parametru c , posloupnost diverguje a tento bod do množiny nepatří. Pro prahovou hodnotu platí $r(c) = \max\{|c|, 2\}$.

Důkaz

Předpokládáme, že $(|z| > r(c) \geq 2) \wedge (|z| > |c|)$. Z toho plyne, že si $|z|$ můžeme napsat jako $|z| = r(c) + \varepsilon$ (pro kladné ε):

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

Což plyne z trojúhelníkové nerovnosti. Takže:

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - c = |z|^2 - c \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) \geq |z|(2 + \varepsilon - 1) = |z|(1 + \varepsilon)$$

Vidíme tedy, že jde o posloupnost, která roste rychleji, než posloupnost geometrická s koeficientem větším než jedna. Takže diverguje.

$$\ddot{\pi}\varepsilon\rho \ddot{e}\delta\varepsilon\iota \delta\varepsilon\tilde{\zeta}\alpha\iota$$

Podobnou úvahou by se to dalo zobecnit pro exponent n . Pak by ale mezní hodnotou bylo číslo $\max\{\sqrt[n-1]{2}, |c|\}$.

3.2 Mandelbrotova množina

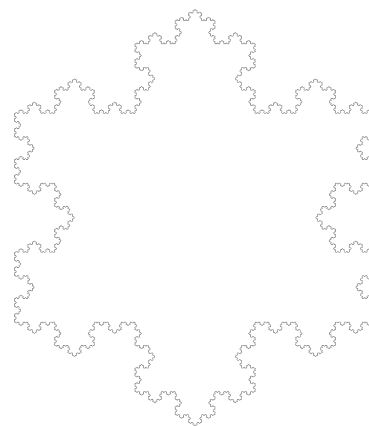
Mandelbrotova množina patří k neznámějším fraktálům. Je definována jako množina komplexních čísel c , kde posloupnost

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad z_0 = 0$$

nediverguje. Od Juliovy množiny se liší tím, že za c se dosazují souřadnice na komplexní rovině narozdíl od konstantního parametru. Stejně jako u Juliovy množiny můžeme dokázat prahovou hodnotu.

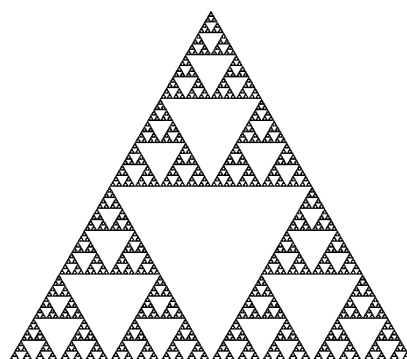
3.3 Kochova vločka

Tento známý fraktál má řadu zajímavých vlastností. Jednou z nich je, že má konečný obsah, avšak nekonečný obvod. Má-li původní trojúhelník stranu délky a , pak je obsah Kochovy vločky roven $\frac{2a^2\sqrt{3}}{5}$.



3.4 Sierpińského těsnění

Tento fraktál, nazývaný též Sierpińského trojúhelník, byl poprvé popsán v roce 1915 polským matematikem Waclawem Sierpińskim, i když podobné obrazce se objevují už v 13. století. Tato struktura souvisí třeba s Pascalovým trojúhelníkem (zbytek po dělení jeho čísel dvěma), nebo s Hanoiskými věžemi (graf reprezentující všechny možné pozice).



4 Zobrazení počítačem

4.1 Náhodná procházka

Mějme v rovině tři nekolineární body. Dále vezměme jiný (náhodně zvolený) bod roviny, který nazveme X_1 . V jedné iteraci vytvoříme bod X_n ve středu úsečky spojující bod X_{n-1} a náhodně vybraný bod ze tří původních bodů. Po dostatečném počtu iterací bude množina $\{X_1, X_2, \dots\}$ tvořit Sierpińského těsnění. Tímto způsobem byl vyroben i výše uvedený obrázek.

4.2 Buněčný automat

Uvažujme čtvercovou síť. Vybarvíme jeden bod. Pak se podíváme na řádek pod ním, všechny body, které mají (ve třech sousedních buňkách) nad sebou jeden nebo dva vybarvené body obarvíme, jiné ne. Pak se přesuneme na další řádek a postup zopakujeme. Takhle dostaneme opět Sierpińského těsnění!

4.3 Vykreslování Mandelbrotovy a Juliovy množiny

Pro každý pixel se počítá posloupnost $z_0, z_1, z_2, \dots, z_i$, kde i je počet iterací. Když pro nějaké n platí $|z_n| > r(c)$, víme, že posloupnost diverguje a bod do množiny nepatří. Pokud ani $|z_i|$ není větší než $r(c)$, bod se zařadí do množiny. U konečného počtu iterací se do množiny započítají také body, které tam nepatří.

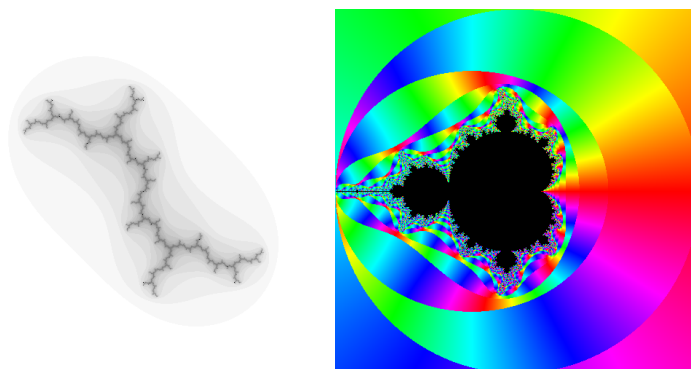
4.3.1 Obarvování

Klasicky se body náležící do množiny obarvují černou a body nenáležící bílou barvou. Výpočet fraktálu generuje posloupnost čísel $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$, kde z_n je iterace, u které $|z|$ překročí prahovou hodnotu. Podle této posloupnosti můžeme daný bod obarvit na základě určité palety.

Únikový algoritmus: Barvu bodu podle tohoto algoritmu určuje počet iterací, po kterých absolutní hodnota $|z_n|$ přesáhne prahovou hodnotu.

Únikový úhel: Zde se počítá s argumentem komplexního čísla z_n .

Odhad zakřivení: Barva se určí na základě křivosti křivky proložené body z_1, z_2, \dots, z_n .



Obrázek 1: Juliova množina, kde $c = i$ a body jsou obarveny podle počtu iterací, a Mandelbrotova množina kde hodnota argumentu komplexního čísla odpovídá odstínu na standardním barevném kole

Pro jednoduchost se často uvažují jen tři poslední členy této posloupnosti. Pro ty se použije vzorec:

$$\left| \tan^{-1} \left[\frac{z_n - z_{n-1}}{z_{n-1} - z_{n-2}} \right] \right|$$

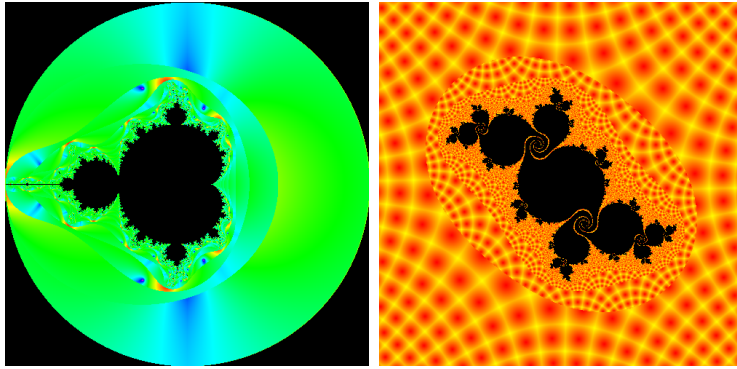
Gaussova celá čísla: V tomto algoritmu se barva vypočítá podle vzdálenosti z_n od Gaussova celého čísla, tedy $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$. Vzdálenost se dá vypočítat pomocí vzorce

$$\sqrt{|\Re(z) - \text{Round}[\Re(z)]|^2 + |\Im(z) - \text{Round}[\Im(z)]|^2}$$

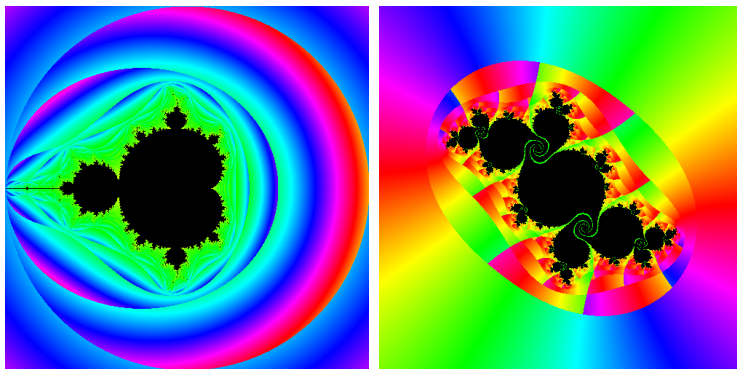
Statistiky: Body se dají obarvit také podle statistických funkcí z množiny $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$. Například podle průměru, rozptylu, směrodatné odchylky, ...

5 Závěr

Veškeré obrázky zde zobrazených fraktálů jsou produktem námi napsaných programů. Chtěli bychom poděkovat našemu supervizorovi Ing. Petru Paušovi, který nás seznámil s problematikou fraktálů a zodpověděl veškeré naše dotazy.



Obrázek 2: Mandelbrotova množina s obarvením podle zakřivení dvou po sobě jdoucích iterací a Juliova množina s $c = -0.13850095 + 0.653277755i$, kde barva závisí na vzdálenosti poslední iterace od Gaussova celého čísla



Obrázek 3: Obarvení podle průměru $|z_0|, |z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|$ a podle průměru argumentů komplexních čísel posloupnosti $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$

Reference

- [1] Petr Pauš. *Počítačové generování fraktálních množin*.
<http://geraldine.fjfi.cvut.cz/pausp/files/reserse.pdf>. 2004.