Počítačové zobrazování fraktálních množin

František Couf, Jakub Matěna, Jakub Medek, Ondřej Tinka
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT, Trojanova 13
frantisek@coufovi.cz, matenajakub@gmail.com,
medekjak@gmail.com, ondrej.tinka@gmail.com

Abstract:
Have you ever wondered what infinity is? How it could look like? Have you ever thought that when you are looking at fern you are looking to infinity? The key for understanding this phenomenon are fractals and we uncovered them and brought them to light.

1 Úvod

Co je to fraktál?

Fraktál je geometrický objekt, který je soběpodobný. To znamená, že pokud takový objekt pozorujeme v libovolném měřítku a pod jakýmkoli zvětšením, vždy uvidíme nějaký charakteristický útvar. Pojem fraktál definoval matematik Benoit Mandelbrot na přelomu 60. a 70. let minulého století. Samotné slovo vychází z latinského slova fráctus, což znamená rozbitý, rozlámaný. Je známo několik druhů fraktálů. My jsme se zaměřovali na dva druhy. Prvním z nich jsou klasické fraktály, byly známy ještě před Mandelbrotem a snažily se osvětlit hranice matematických pojmů. Dalším druhem by mohly být fraktály v komplexní rovině.

Klasické fraktály

Jedny z prvních fraktálů vznikly jako pokus o nalezení hranic matematických pojmů, kdy matematici vymysleli různé matematické objekty vyhovující definicím, ale svými vlastnostmi velmi podivné. Mezi tyto objekty můžeme zařadit například Cantorovu množinu, či Sierpinského trojúhelník a koberec.

Cantorovu množinu lze získat, pokud z intervalu $\langle 0;1\rangle$ odebereme prostřední části intervalu. Tím získáme dva menší intervaly. Ty dále dělíme stejně jako ten původní. Takto pokračujeme až do nekonečna, až nám zbydou krajní body z každého intervalu. Množina těchto bodů se nazývá Cantorova. Je zajímavá zejména svou nekonečností, spočetností. Zápis jejích prvků v pětkové soustavě je tvořen číslicemi menšími nebo rovnými 2 – vyplývá ze soběpodobnosti. Můžeme si všimnout, že délka intervalů je v jednom kroku stejná. Cantor sám se zabýval mohutnostmi množin.

Sierpinského trojúhelník vzniká z rovnostranného trojúhelníku vyplněného černou barvou. Poté každý černý trojúhelník rozdělíme středními příčkami na 4 shodné trojúhelníky a prostření obarvíme bíle. Takto postupujeme do nekonečna. Pravidlo tvoření daného objektu se neustále opakuje do nekonečna a to je potvrzení toho, že objekt má fraktální vlastnosti. Aplikací Sierpinského trojúhelníku může být oddělení sudých a lichých čísel v Pascalově trojúhelníku; černé trojúhelníky – sudá čísla, bílé trojúhelníky - lichá čísla.

Fraktály v komplexní rovině

Tyto fraktály jsou zobrazením složitých množin v komplexních číslech. Mezi nejznámější takové množiny patří množina Mandelbrotova a množiny Juliovy.

Mandelbrotova množina je vytvořena iterací funkce komplexní paraboly popsané rovnicí:

$$z_{n+1}=z_n^2+c$$

Čísla z_n a c leží v komplexní rovině. Vlastně se jedná o nekonečnou posloupnost komplexních čísel $z_0, z_1, z_2 \ldots$ Další člen získáme vždy umocněním předchozího členu na druhou a přičtení konstanty, která je v případě Mandelbrotovy množiny rovna členu z_0. Abychom rozhodli, jestli daný bod v komplexní rovině leží v Mandelbrotově množině nebo ne, potřebujeme spočítat limitu posloupnosti začínající právě tímto bodem. Pokud je limita rovna nekonečnu, tak bod v množině neleží, v opačném případě ano.

Juliovy množiny jsou téměř stejné. Rozdíl je pouze v tom, že konstanta c není rovna členu z_0, ale je stejná pro všechny body a libovolně zvolená. Touto modifikací Mandelbrotovy množiny získáme mnoho různých a zajímavých tvarů.

2 Počítačové zobrazování

Náplní našeho projektu bylo zobrazování fraktálů pomocí programů, které jsme sami naprogramovali. Naše programy umožňují další manipulaci s výsledkem jako je posun obrazu, zvětšení (až do jisté míry kvůli limitu velikosti datového typu *double*). V našich programech jsou implementovány funkce pro screenshot a dokonce i pro vytvoření animace. Využívali jsme programovací jazyky C, Java a Asymptote, což je jazyk vytvořený speciálně pro vektorovou grafiku.

Metodika zobrazování fraktálů v komplexní rovině

Pokud chceme zobrazit fraktál v komplexní rovině na počítači, musíme se spokojit s přibližnými výpočty, protože nejsme schopni spočítat nekonečný počet členů posloupnosti pro nekonečný počet bodů, které leží v rovině. Vše se bude odvíjet od rozlišení obrázku, který budeme chtít vytvořit. Následně si vybereme část komplexní roviny, kterou budeme zobrazovat a jednotlivé pixely našeho obrázku přepočítáme na body v této rovině. Pro tyto body můžeme spočítat konečný počet členů a rozhodnout, jestli bod leží v té konkrétní množině, kterou chceme zobrazit, či nikoliv.

Mandelbrotova množina

Pokud absolutní hodnota jednoho členu posloupnosti $z_{n+1}=z_n^2+c$ bude větší než 2, tak lze dokázat, že je posloupnost rostoucí, a proto se její limita rovná nekonečnu. Pokud žádný ze spočítaných členů posloupnosti pro nějaký bod tuto hodnotu nepřesáhne, tak nemůžeme rozhodnout, zda leží v Mandelbrotově množině. U takových bodů budeme předpokládat, že opravdu leží v Mandelbrotově množině. Takové body obarvíme černě a zbylé body jinou barvou, přičemž o barvě rozhoduje to, kolik jsme museli spočítat členů posloupnosti, než hodnota posledního členu byla větší než 2. Obarvení je esteticky důležité, avšak pro něj neexistují konkrétnější pravidla.

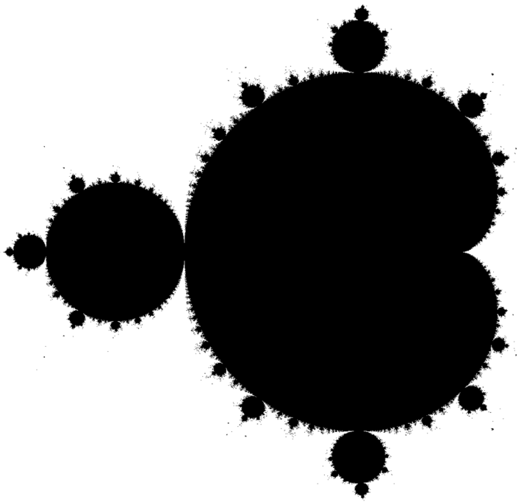
Další důležitou součástí programu je možnost vybrat si konkrétní část komplexní plochy, kterou zobrazíme. Nejjednodušší je ovládání přes klávesnici. Šipkami se posouváme v komplexní rovině a pomocí + a - zvětšujeme nebo zmenšujeme plochu zobrazované části roviny.

Metodika zobrazování klasických fraktálů

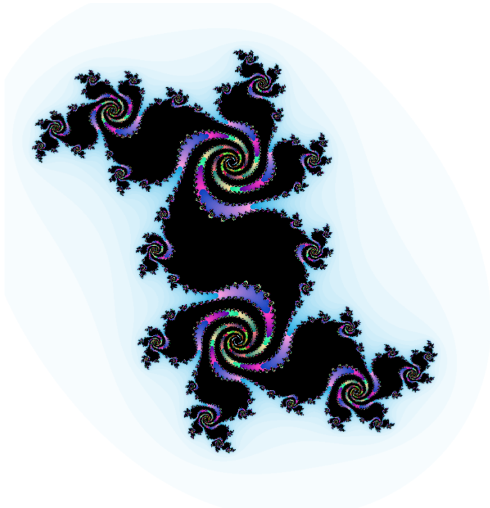
Postupnou rekurzí funkce tvořící spirálu (rekurze probíhá do nekonečna) získáme fraktální objekt (obrázek 7). Každá spirála znázorňuje trajektorii objektu A, jež obíhá kolem hmotnějšího objektu (středu spirály). Odstředivá síla působící na těleso A je menší než gravitační, která ho přitahuje směrem do středu a proto se pohybuje po spirální dráze. Přibližuje se ke středu, až jím bude pohlceno. Soustava spirál představuje galaxii, kde dochází k postupnému pohlcování objektů méně hmotných objekty více hmotnými. Miniaturních objektů trvale přibývá, a tudíž nedojde k ukončení procesu, tedy spirální galaxie je fraktální množinou.

Výsledky

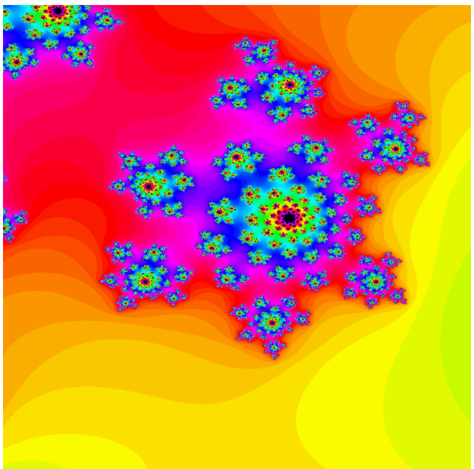
Výsledkem naší práce jsou programy, které jsou schopné vygenerovat obrazy fraktálů, uvádíme některé z nich.



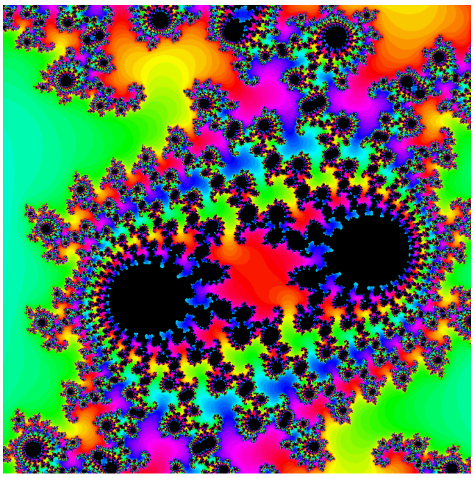
Obrázek 1: Mandelbrotova množina



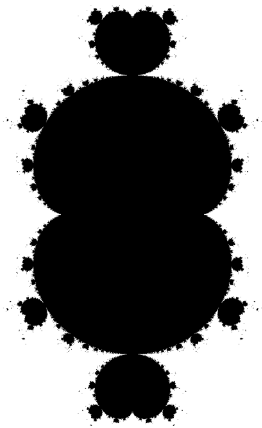
Obrázek 2: Juliova množina



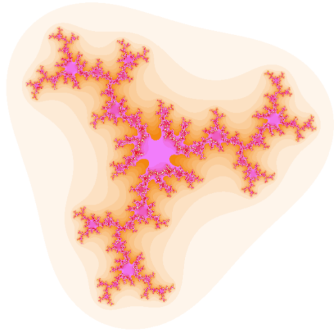
Obrázek 3:Výřez Juliovy množiny



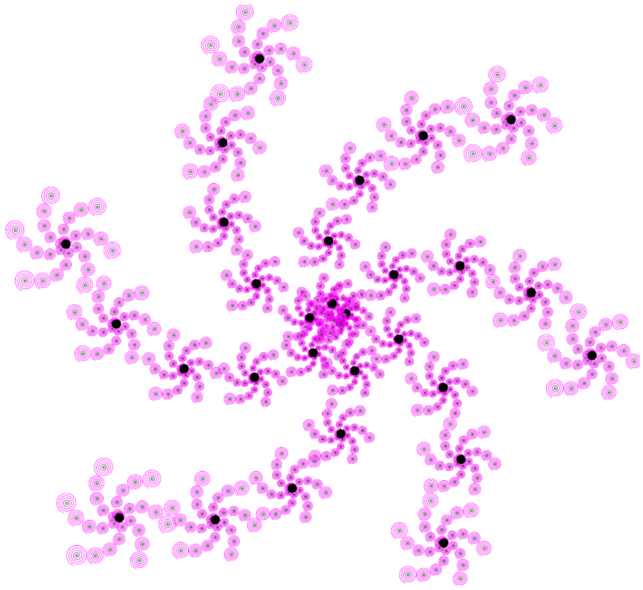
Obrázek 4: Výřez Juliovy množiny



Obrázek 5: Kubická Mandelbrotova množina



Obrázek 6: Kubická Juliova množina



Obrázek 7: Klasický fraktál - spirála

3 Závěr

Dozvěděli jsme se, co všechno si můžeme pod pojmem fraktál představit. Pochopili jsme teoretický základ a dokázali jsme graficky zobrazit fraktály různých druhů pomocí progromovacích jazyků C, Java a Asymptote. Výsledkem naší práce je program, který umožňuje prohlížení fraktálních množin a několik videí.

Poděkování

Děkujeme našemu supervisorovi Petru Paušovi za seznámení s problematikou ohledně fraktálních množin a za pomoc při zpracování našich výsledků. Dále bychom rádi poděkovali všem organizátorům Týdne vědy na Jaderce.

Reference

[1] Pauš P.: Počítačové generování fraktálních množin, 2004
[2] Jeřábek O., Krumlová I., Martinek M., Scheubrein M.: Dimenze iteračních fraktálů, 2014
[3] Chaos and Fractals, Springer-Verlag, Berlin, 1993
[4] Fractal, http://mathworld.wolfram.com/Fractal.html