Výpočet obsahu plošných obrazců metodou Monte Carlo

D. Žáček, Gymnázium Christiana Dopplera, Praha
davidzacek13@gmail.com
D. Hausner, Gymnázium a SOŠ, Plasy
daniel.hausner@mensa.cz
Š. Malec, SPŠ a VOŠ, Kladno
stevemal@seznam.cz
N. Kalábová, Friedrich-Schiller Gymnasium, Pirna
nikola@kalabova.eu

Abstrakt:
Metoda Monte Carlo se využívá k určení obsahu plošných obrazců v případě, že použití běžných integračních metod není možné, nebo je velice komplikované. V miniprojektu jsme si vyzkoušeli metodu Monte Carlo jak u integrovatelných, tak u neintegrovatelných funkcí a obrazců a také tuto metodu porovnali s metodou obdélníkovou a s určitým integrálem, který je vůbec nejpřesnější. Použití Monte Carla se zdá býti velice výhodným, i přes svou časovou náročnost, především u obrazců, kde výše jmenované metody použít nelze.

1 Úvod

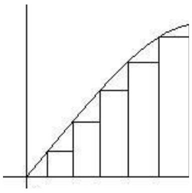
Obsah jednodušších obrazců lze vypočítat pomocí integrálů. Jednou metodou pro výpočet obsahu složitějších obrazů je obdélníková metoda, ta je na rozdíl od integrování jen omezeně přesná. Další je metoda Monte Carlo, kterou lze použít k výpočtu obsahu jakéhokoliv plošného obrazce a to i u obrazců, kde žádná z výše uvedených metod není možná. Principem je určení střední hodnoty veličiny, která je výsledkem náhodného děje. Vytvoříme počítačový model toho děje a po proběhnutí dostatečného množství simulací zpracujeme data statistickými metodami.

2 Metody

2.1 Určitý integrál

Udává obsah plochy, která je ohraničena osou x, grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$. Určitý integrál značíme $\int_a^b f(x)dx$.

2.2 Obdélníková metoda



Principem obdélníkové metody je konstrukce obdélníků, dotýkající se jedním bodem horní hrany grafu funkce. Všechny obdélníky mají stejnou šířku. Čím užší obdélníky jsou, tím je metoda přesnější.

2.3 Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo má širokou možnost využití. Obecně se dá říci, že je možné ji použít všude tam, kde je řešení možné nalézt pomocí mnohokrát opakovaných náhodných pokusů. Tyto problémy lze nalézt ve všech oborech [1], nejen v matematice, ale také v oblasti financí a obchodu, fyzice a fyzikální chemii, ve výpočetní technice a hrách apod.
U plošných obrazců tato metoda funguje na principu ohraničení obrazce útvarem o známém obsahu a následně náhodným generováním bodů a rozlišováním, jestli jsou uvnitř nebo vně obrazce. Obsah obrazce se vypočítá z vztahu [2]

$$I = \frac{P_{uvnitr}}{P_{vse}} S_{cele}, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{I}$ je obsah obrazce, $\boldsymbol{P}_{\mathrm{uvnitr}}$ je počet bodů uvnitř obrazce, $\boldsymbol{P}_{\mathrm{vse}}$ je celkový počet bodů a $\boldsymbol{S}_{\mathrm{cele}}$ je celkový obsah útvaru.
Pro metodu Monte Carlo lze také vypočítat směrodatnou odchylku ze vztahu

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{N}$ je celkový počet vygenerovaných bodů [1].

3 Výsledky

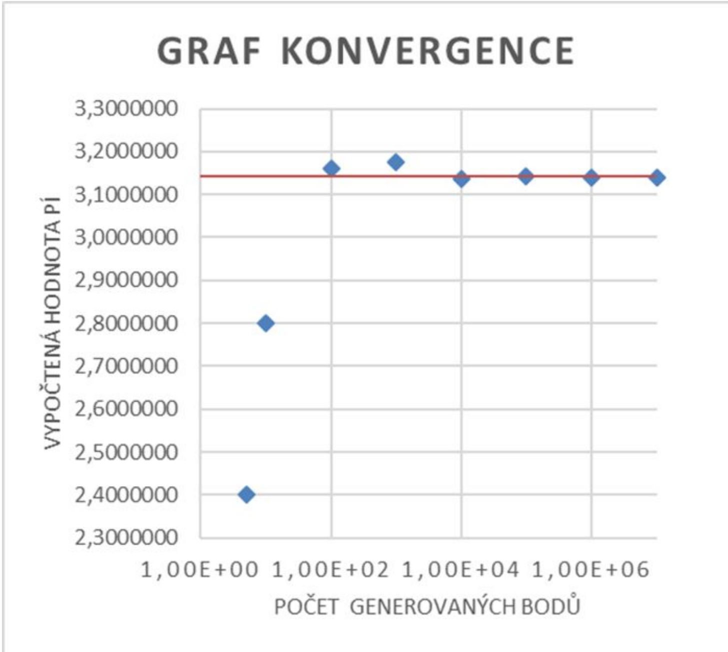
3.1 Výpočet hodnoty $\boldsymbol{\pi}$

Metodu Monte Carlo jsme použili k vypočtení přibližné hodnoty čísla pí, tak že jsme si definovali obrazec $x^2 + y^2 \leq 1$ (kruh s poloměrem $r = 1$) a pro výpočet vzali v úvahu pouze první kvadrant. Ze vzorce pro obsah kruhu vyplývá

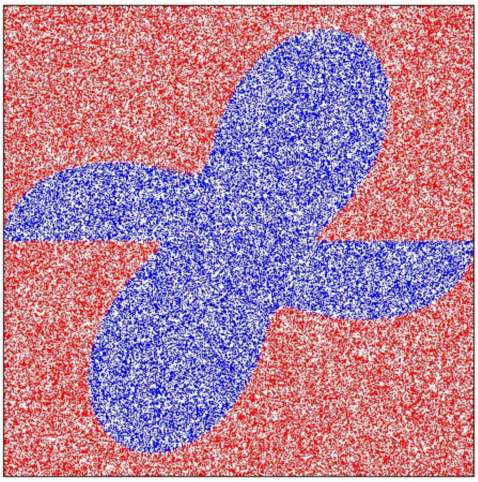
$$\pi = 4S, \tag{3}$$

kde S je obsah našeho čtvrtkruhu.
V jazyce Java jsme napsali program, který náhodně generoval body a určoval, zda se nachází uvnitř útvaru či nikoli. Pomocí vzorců (1) a (3) jsme určili přibližnou hodnotu pí.
Výstup z programu jsme zpracovali v MO Excel (viz tabulka a graf výš) a pozice generovaných bodů je graficky znázorněna na třetím obrázku (z programu Gnuplot). Z grafu je patrné, že se zvyšujícím se počtem generovaných bodů se odchylka zmenšuje a to dle vztahu (2).

N	Vypoct. Pi
5	2,4000000
10	2,8000000
100	3,1600000
1000	3,1760000
10000	3,1368000
100000	3,1436400
1000000	3,1408040
10000000	3,1407524



3.2 Výpočet plochy uzavřené křivky



V druhém případě jsme dostali zadaný útvar

$$x^2 + y^2 \leq (1 + 0,5 \sin (3 \arctan(\tfrac{x}{y})))^2,$$

kde je použití metody Monte Carlo výhodné. V tomto případě jsme opět vytvořili obdobný program popsaný výše a výstup z něj jsme opět zpracovali v Gnuplotu. Útvar zaujímá 39,14 % ze zobrazené plochy.

3.3 Výpočet plochy pod křivkou

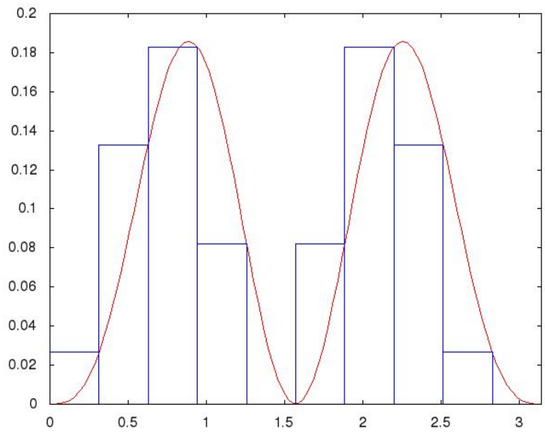
Ve třetím případě jsme porovnávali plochu pod grafem funkce

$$y = \sin^3(x) \cos^2(x)$$

s definičním oborem $\langle 0, \pi \rangle$ vypočtenou metodou Monte Carlo a obdélníkovou metodou s přesnou hodnotou získanou pomocí určitého integrálu

$$\int_0 \sin^3(x) \cos^2(x) \, \mathrm{d}x = \tfrac{4}{15}.$$

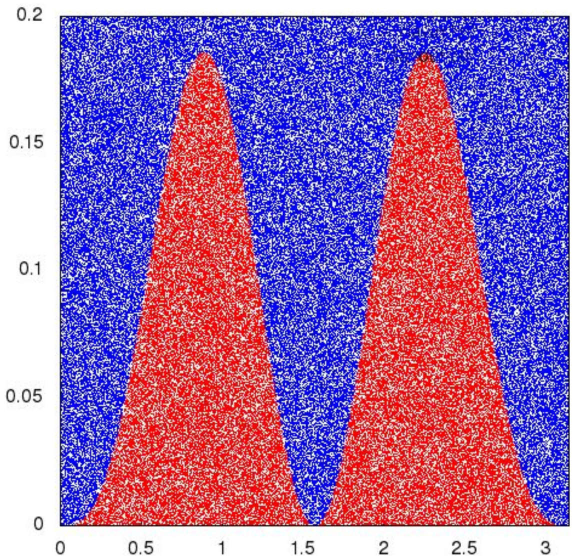
Vytvořili jsme program, který vypočítal obsah obrazce pomocí obdélníkové metody. V tomto programu jsme měnili počet obdélníků a počítali v závislosti na šířce obdélníku odchylku od skutečného obsahu obrazce. Zjistili jsme, že již při relativně malém počtu obdélníků je odchylka malá a tím pádem je tato metoda docela přesná.



Počet kroků	Šířka kroků	Obsah pod křivkou
2	π/2	1,55E-13
3	π/3	0,340087
4	π/4	0,27768
5	π/5	0,270252
6	π/6	0,268218
7	π/7	0,267455
8	π/8	0,267112
9	π/9	0,266938
10	π/10	0,266841
100	π/100	0,266667
1000	π/1000	0,266667

Nakonec jsme vytvořili program, který náhodně generoval body a zbarvoval je podle toho, jestli ležely uvnitř, nebo vně obrazce. V tomto programu jsme měnili počet vygenerovaných čísel a sledovali jsme přesnost určení obsahu obrazce v závislosti na počtu vygenerovaných čísel.

Počet bodů	Vypočtená hodnota	Směrodat. odch
10^0	0.314159	0.331153
10^1	0.301593	0.097339
10^2	0.252584	0.031597
10^3	0.265088	0.011678
10^4	0.267299	0.003314
10^5	0.266799	0.000924
10^6	0.266670	0.000270
10^7	0.266630	0.000128



Zjistili jsme, že při velkém počtu bodů se vypočítaný obsah jen málo odchyluje od skutečného obsahu obrazce.

4 Shrnutí

Po vyzkoušení všech tří metod pro výpočet obsahu plošných obrazců jsme došli k závěru, že nejpřesnější metodou je určitý integrál, který ale nelze použít ve všech případech. U obrazců, kde určitý integrál použít nelze, je výhodnější obdélníková metoda, která je při velkém počtu obdélníků velmi přesná a rychlejší než metoda Monte Carlo. U obrazců, ve kterých nelze použít ani určitý integrál, ani obdélníkovou metodu, musíme použít Monte Carlo, která je při velkém počtu náhodně generovaných bodů také velmi přesná, její nevýhodou je však větší časová náročnost.

5 Poděkování

Chtěli bychom velice poděkovat FJFI ČVUT za uspořádaný Týden vědy na Jaderce, především Ing. Vojtěchu Svobodovi, CSc. a celému organizačnímu týmu. Dále pak supervizorovi našeho projektu Ing. Petru Ambrožovi, Ph.D. a všem ostatním osobám a sponzorům, bez kterých by se akce nemohla uskutečnit.

Reference

[1] WIKIPEDIA: *Metoda Monte Carlo,* https://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_Monte_Carlo, [cit. 2016-06-21].

[2] EDWARDS, D.: *Monte Carlo Integration,* www.cs.utah.edu/~edwards/research/mclutigration.pdf, [cit. 2016-06-21].