Palindromická a antipalindromická čísla v záporných číselných soustavách

J. Harašta, V. Menšíková, J. Mynář, K. Sedláček

Vedoucí projektu: A. Blažek

Úvod

Tento poster pojednává o palindromických a antipalindromických číslech jak v kladných tak i záporných soustavách. Palindromická čísla mají tu vlastnost, že se čtou stejně zepředu i zezadu. Antiplaindromická čísla už mají méně intuitivní definici: pokud přičtu k antipalindromu číslo, které má číslice v opačném pořadí, vznikne číslo pouze skládající se z největších možných číslic. Antipalindromy jsou poměrně neprobádané téma a tedy naším cílem bylo prozkoumat tato čísla spolu s palindromy a zjistit o nich co nejvíce zajímavých vět.

Palindromická čísla

Nechť $b \in \mathbb{Z} \mid |b| \geq 2$. Uvažujme celé číslo m jehož rozvoj základu b je roven $m = a_n b^n + \cdots + a_1 b + a_0$ kde $a_0 a_1 \ldots a_n \in \{0, 1, \ldots, |b| - 1\}$ a $a_n \neq 0$. Pak m nazýváme palindromickým číslem základu b pokud jeho cifry splňují podmínku: $a_j = a_{n-j}$ pro všechna $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Příklad: Číslo 12321 je palindrom, protože se čte stejně zepředu i zezadu.

Věty o palindromických číslech

Věta 1. Mějme $(m)_b = \overline{\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}$, pak při uvažování o opačném základu musí platit $(m)_{-b} = \overline{(\alpha_{2n}+1)(b-\alpha_{2n-1})\ldots(\alpha_2+1)(b-\alpha_1)\alpha_0}$.

Věta 2. Existují palindromy v soustavě o základu b pro které platí, že jsou palindromické i v soustavě o základu $-b$.

Například číslo 5, u kterého $(5)_2 = (5)_{-2} = \overline{101}$. Tato čísla existují pouze ve 3 tvarech:

1. $(m)_b = \overline{10a0a...a01}$, kde a je náhrada za číslici 0 nebo 1
2. $(m)_b = \overline{11...1}$
3. $(m)_b = \overline{1100...011}$

Antipalindromická čísla

Nechť $b \in \mathbb{Z} \mid |b| \geq 2$. Uvažujme celé číslo m, jehož rozvoj základu b je roven $m = a_n b^n + \cdots + a_1 b + a_0$ kde $a_0 a_1 \ldots a_n \in \{0, 1, \ldots, |b| - 1\}$ a $a_n \neq 0$. Pak m nazýváme antipalindromickým číslem základu b pokud jeho cifry splňují podmínku: $a_j = |b| - 1 - a_{n-j}$ pro všechna $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Příklad: Číslo 3456 je antipalindrom, protože $3 + 6 = 9 = 4 + 5$.

Věty o antipalindromických číslech

Věta 1. Je-li m antipalindromické číslo základu b a jeho rozvoj $(m)_b = \overline{a_n \cdots a_0}$ má lichý počet cifer, musí pak b být liché.

Věta 2. Jakékoliv antipalindromické číslo s lichým základem $b \leq -3$ a s lichým počtem cifer je dělitelné $\frac{|b|-1}{2}$.

Věta 3. V lichém základě $b < -3$ existují maximálně dvě antipalindromická prvočísla, a sice -2 a $\frac{|b|-1}{2}$ (přičemž pro sudá je jediným antipalindromickým prvočíslem -2)

Hlavní věta

Nechť $m, b \in \mathbb{N},\ b \geq 2$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\overline{(-m)_{-b} = \alpha_n \cdots \alpha_0}$ je palindrom, $\alpha_i \neq 0$ pro všechna $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ a zároveň $\alpha_n \neq 1$,
2. $\overline{\beta_n \cdots \beta_0}$ je antipalindrom se sudým počtem cifer a $\beta_j \neq 0$ pro všechna $j \in \{0, 2, \ldots, n - 1\}$,

přičemž oba rozvoje mají stejnou délku. Navíc toto jsou jediné případy, kdy $(-m)_{-b}$ je palindrom a $(m)_b$ je antipalindrom.

Důkazy

Pokud vás nějaké z vět zaujali, všechny důkazy jsou podrobně vysvětleny v článku, který byl nahrán do sborníku týdne vědy 2024 pod názvem palindr.

Poděkování

Moc děkujeme organizátorům akce Týdne vědy na Jaderce, díky které jsme se mohli seznámit s tímto tématem. Dvakrát tak více pak děkujeme Adamu Blažkovi za vedení našeho projektu.

Reference

[1] DVOŘÁKOVÁ L'.; KRUML S.; RYZÁK D. Antipalindromic numbers. Acta Polytechnica. 2021. Dostupné také z: `https://doi.org/10.14311/AP.2021.61.0428`. [cit. 2024-06-18]