Výpočet obsahu plošných obrazců metodou Monte Carlo

Ondřej Nevěřil[1], Michal Helma[2], Monika Králová[3]

[1]G Zábřeh; ondra.neveril@centrum.cz
[2]Masarykovo G, Plzeň; michal.helma.188b@mgplzen.cz
[3]G Jírovcova, České Budějovice; kralovamonika42@gmail.com

P. Ambrož, školitel; KM FJFI ČVUT v Praze

Abstrakt

Tato práce se zabývá metodou Monte Carlo. Konkrétně pak třemi případy, při kterých právě metodu Monte Carlo využijeme, a to výpočtem hodnoty Ludolfova čísla, plochy pod křivkou a plochy uvnitř uzavřené křivky.

1 Úvod

Metoda Monte Carlo je metoda řešení matematických příkladů a jiných problémů s využitím modelování náhodných veličin. Jednou z mnoha možností využití této metody je určení obsahu plošných obrazců.

Naším úkolem bylo pomocí programovacího jazyka Python vytvořit program, který by za pomoci generování pseudonáhodných čísel umožnil odhad Ludolfova čísla, obsahu plochy pod křivkou a plochy uvnitř křivky.

2 Postup

2.1 Použití metody Monte Carlo pro výpočet plochy

Chtěli jsme spočítat plochu oblasti S_Ω, části obdélníka O. Náhodně jsme generovali souřadnice bodů v obdélníku O tak, aby v něm byly rovnoměrně rozprostřené. Na základě souřadnic jsme určili, zda se daný bod B nacházel uvnitř zvoleného obrazce (oblasti Ω).

Pro odhad obsahu plochy S_Ω jsme využili toho, že pravděpodobnost výskytu náhodně vybraného bodu B uvnitř Ω je rovna podílu plochy S_Ω a celkové plochy obdélníku S_O.

Obsah plochy S_Ω jsme tedy vypočítali díky znalosti poměru bodů, které se v Ω nachází ku celkovému počtu vygenerovaných bodů; formálně:

$$\frac{S_\Omega}{S_O} = P[B \in \Omega], \quad \text{tedy} \quad S_\Omega = S_O \cdot \frac{N_{\text{uvnitř}}}{N_{\text{celek}}}.$$

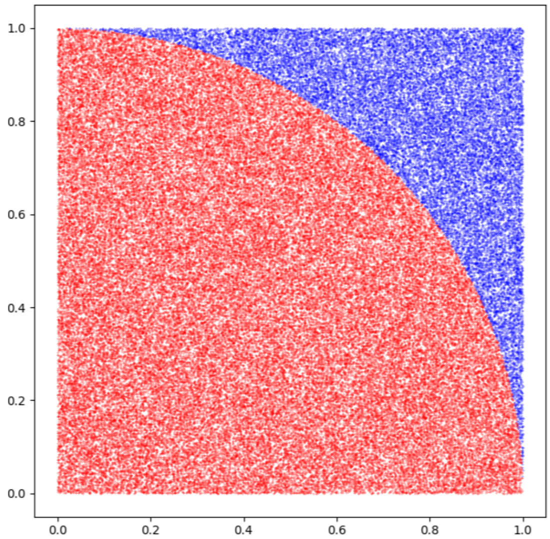
2.2 Program pro výpočet

Program generoval odhad obsahu plochy pomocí 10^k bodů v deseti opakováních. Z určených odhadů jsme pak spočítali aritmetický průměr $\bar{x}$, a výběrovou směrodatnou odchylku s.

3 Výsledky

3.1 Výpočet hodnoty čísla π

Odhad hodnoty Ludolfova čísla jsme učinili pomocí obsahu kruhu. Určovali jsme podíl plochy čtvrtkruhu Ω vůči ploše čtverce O, jehož dvě strany jsou shodné s hranami čtvrtkruhu Ω. Z tohoto odhadu jsme pomocí vztahu $S_\Omega = \frac{1}{4}\pi r^2$ získali odhad π. Hodnoty souřadnic x a y byly generovány v intervalu $\langle 0; 1\rangle$.



Obrázek 1: Červeně body uvnitř kruhu, modře vně kruhu

N	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$\bar{x}$	3,32000	3,16400	3,15640	3,14176	3,14281	3,14173	3,14174	3,14157
s	0,46380	0,15827	0,03306	0,01007	0,00445	0,00116	0,00041	0,00014

Tabulka 1: Aritmetické průměry výsledků a výběrové směrodatné odchylky

Výsledné hodnoty se shodují s notoricky známým rozvojem Ludolfova čísla $\pi = 3{,}1415926\ldots$, při hodnotě $N = 10^8$ dosahujeme přesnosti na 4 platné číslice.

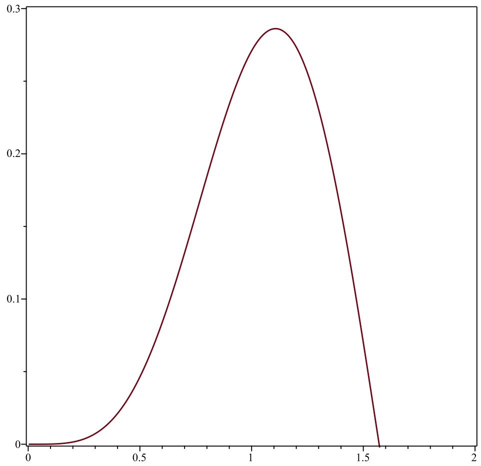
3.2 Plocha pod křivkou

Dále jsme počítali plochu pod křivkou určenou funkcí $f(x) = \sin^4 x \cos x$ v intervalu $\langle 0; \pi/2\rangle$. Pro tuto plochu jsme schopni určit přesnou hodnotu obsahu, ke které by se měly námi vygenerované hodnoty blížit, pomocí integrace.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x \,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = \cos x \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin x \end{array} \right\} = \int_0^1 t^4 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

Pro účely výpočtu Metodou Monte Carlo byly hodnoty souřadnice x generovány v intervalu $\langle 0; 2\rangle$. I když nás zajímala plocha pod křivkou pouze na intervalu $\langle 0; \pi/2\rangle$, správnost výsledku to neovlivnilo, protože na intervalu $(\pi/2; 2\rangle$ jsou hodnoty funkce f

záporné. Hodnoty souřadnice y byly generovány v intervalu $\langle 0; 0{,}3 \rangle$. Horní mez intervalu je větší než maximum funkce f, proto platí, že plocha Ω leží uvnitř obdélníku O.



Obrázek 2: Funkce $f(x) = \sin^4 x \cos x$ v obdélníku O

N	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$\bar{x}$	0,17400	0,20700	0,19740	0,19913	0,19962	0,20009	0,19998	0,20000
s	0,08695	0,02177	0,00669	0,00161	0,00076	0,00019	0,00008	0,00002

Tabulka 2: Aritmetické průměry výsledků a výběrové směrodatné odchylky

Vypočítané hodnoty se uspokojivě shodují s přesnou hodnotou získanou pomocí integrace.

3.3 Plocha uvnitř křivky

Poslední křivka je určená funkcí $r(\varphi) = 1 + 4\cos(8\varphi)$ v polárních souřadnicích. Hodnoty souřadnic x a y byly generovány v intervalu $\langle 0; 5 \rangle$. Na obrázku je tak pouze část plochy Ω, která leží v prvním kvadrantu. Díky symetrii grafu funkce stačí ke zjištění obsahu plochy Ω znát obsah v jednom z kvadrantů.

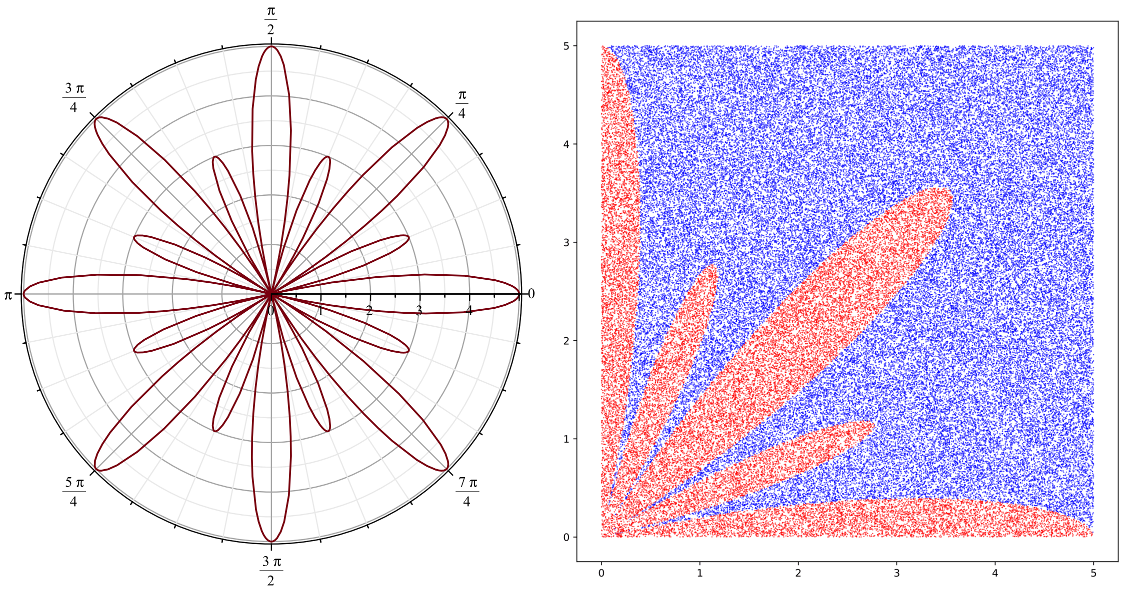
N	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$\bar{x}$	32,0000	26,5000	28,4900	28,0970	28,2738	28,2623	28,2787	28,2758
s	19,8886	5,0827	1,7451	0,4206	0,1426	0,0303	0,0143	0,0035

Tabulka 3: Aritmetické průměry výsledků a výběrové směrodatné odchylky

Obsah plochy uvnitř této křivky lze také zjistit pomocí integrace v polárních souřadnicích. Výsledky se opět shodují, obsah plochy odpovídá hodnotě 9π.

4 Shrnutí

Obecně platí [1], že pokud chceme výsledek metody Monte Carlo na k platných číslic, potřebujeme 10^{2k} náhodných pokusů. Naše výsledky tomu neodporují, ve všech třech



Obrázek 3: Vlevo – graf funkce v polárních souřadnicích, vpravo – červeně body uvnitř plochy Ω, modře vně

případech klesá řád výběrové směrodatné odchylky o jedna, když zvyšujeme počet pokusů o dva řády. Tato závislost je omezením této metody, a například právě pro výpočet Ludolfova čísla existují metody [2], u kterých výsledky konvergují k přesné hodnotě rychleji.

Poděkování

Tímto bychom chtěli poděkovat všem organizátorům týdne vědy na Jaderce a ČVUT za poskytnutí prostorů. Speciální díky patří našemu odbornému garantovi Ing. Petrovi Ambrožovi, Ph.D., bez jehož vedení a pomoci bychom to nikdy sami nezvládli.

Odkazy

1. DŘÍMAL, J.; TRUNEC, D.; BRABLEC, A. *Úvod do metody Monte Carlo*. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Katedra fyzikální elektroniky, 2006.
2. CHUDNOVSKY, D. V.; CHUDNOVSKY, G. V. Approximations and complex multiplication according to Ramanujan. In: *Ramanujan revisited (Urbana-Champaign, Ill., 1987)*. Academic Press, Boston, MA, 1988, s. 375–472. ISBN 0-12-058560-X.
3. WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Monte Carlo method — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2024. Dostupné také z: `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Monte_Carlo_method&oldid=1225843687`. [cit. 2024-06-18].