Palindromická a antipalindromická čísla

J. Harašta[1], V. Menšíková[2], J. Mynář[3], K. Sedláček[4]

[1]G a JŠ Břeclav; janharasta10@gmail.com
[2]Arcibiskupské G, Praha; mensikov@arcig.cz
[3]G Boskovice; zakopo185@gmail.com
[4]GEVO Sázavská, Praha; krystof.sedlaacek@gmail.com

A. Blažek, školitel; KM FJFI ČVUT

Abstrakt

Práce pojednává o palindromických a antipalindromických číslech v záporných číselných soustavách. Palindromická čísla mají tu vlastnost, že jejich ciferný zápis se čte zprava stejně jako zleva. Zjistili jsme pár vlastností, které pro tato čísla platí, zobecnili jsme tyto výsledky i pro záporné soustavy a dokonce i našli vztah mezi palindromickými a antipalindromickými čísly.

1 Úvod

Palindromy jsou velmi zkoumané téma, avšak o antipalindromech se toto říct nedá. Chtěli jsme proto prozkoumat toto ještě neprobádané teritorium a zjistit o něm co nejvíce se dá, v limitovaném časovém intervalu - dvou dnech.

2 Definice a lemmátka

Definice 1. Nechť $b \in \mathbb{Z}, |b| \geq 2$. Uvažujme celé číslo m, jehož rozvoj základu b je roven

$$m = a_n b^n + \cdots + a_1 b + a_0$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots, |b|-1\}, a_n \neq 0$. Píšeme $(m)_b = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$. Pak m nazýváme

1. **palindromické číslo** základu b, pokud jeho cifry splňují podmínku:

$$a_j = a_{n-j} \text{ pro všechna } j \in \{0, 1, ..., n\}, \tag{1}$$

2. **antipalindromické číslo** základu b, pokud jeho cifry splňují podmínku:

$$a_j = |b| - 1 - a_{n-j} \text{ pro všechna } j \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Lemma 1. *Uvažujme číslo $(m)_b$ pro $b \leq -2$. Congruence $n \equiv 1 \pmod 2$ bude platit právě když $m < 0$*

Důkaz. Pro $n \equiv 1 \pmod 2$ bude platit

$$m = a_n(-b)^n + \cdots + a_1(-b) + a_0 \,.$$

Najděme nyní minimální hodnotu m, pro kterou bude platit, že všechny liché cifry budou minimální, neboli $a_0, a_2, ...a_{n-2} = 0$ a $a_n = 1$. Naopak všechny liché cifry bou co největší, neboli $a_1, a_3, ...a_{n-1} = -b + 1$.

$$m = (b)^n + (-b+1)(1 + b^2 + b^4 + ... + b^{n-1})$$

Pomocí vzorce pro součet konečné geometrické řady dostáváme

$$m = (b-1)(1 + b + ... + b^{n-1}) + 1 + (-b+1)(1 + b^2 + b^4 + ... + b^{n-1}),$$

což lze upravit na

$$m = (b-1)(b + b^3 + ... + b^{n-1}) + 1,$$

což pro $b \leq 2$ jasně stanovuje $m < 0$.

Pro $n \equiv 0 \pmod 2$ je důkaz duální a plyne z něj $m > 0$. ■

Lemma 2. *Jakékoliv antipalindromické číslo s lichým základem $b \leq -3$ a s lichým počtem cifer je dělitelné $\frac{|b|-1}{2}$.*

Důkaz. Uvažujme antipalindromické číslo $m = a_n b^n + \cdots a_1 b + a_0$, kde n je sudé a b je liché. Je zřejmé, že $b \equiv -1 \pmod{|b|-1}$, neboli $b \equiv -1 \pmod{\frac{|b|-1}{2}}$. Můžeme tedy napsat

$$m \equiv a_n - a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \pmod{\frac{|b|-1}{2}}.$$

Z definice antipalindromických čisel máme $a_j + a_{n-j} = |b| - 1$, tudíž i $a_{n-j} - a_{n-j-1} - a_{j+1} + a_j = 0$ a $a_{\frac{n}{2}} = \frac{|b|-1}{2}$. Dosazením dostáváme

$$m \equiv a_{\frac{n}{2}} \equiv \frac{|b|-1}{2} \equiv 0 \pmod{\frac{|b|-1}{2}}.$$

■

Poznámka. Stejné tvrzení platí i pro $b \geq 3$, viz [1].

3 Palindromy v opačných soustavách

Věta 1. *Nechť $m, b \in \mathbb{N},\ b \geq 2$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $(-m)_{-b} = \overline{\alpha_n \cdots \alpha_0}$ *je palindrom,* $\alpha_i \neq 0$ *pro všechna* $i \in \{0, 1, ..., n\}$ *a zároveň* $\alpha_n \neq 1$,
2. $(m)_b = \overline{\beta_n \cdots \beta_0}$ *je antipalindrom se sudým počtem cifer a* $\beta_j \neq 0$ *pro všechna* $j \in \{0, 2, ..., n-1\}$,

přičemž oba rozvoje mají stejnou délku. Navíc toto jsou jediné případy, kdy $(-m)_{-b}$ je palindrom a $(m)_b$ je antipalindrom.

Důkaz. Uvažujme rovnost

$$\alpha_n(-b)^n + ... + \alpha_1(-b) + \alpha_0 = -\big(\beta_n b^n + ... + \beta_1 b + \beta_0\big)\,,$$

kterou kvůli lichosti n z (1) (resp. podmínky) můžeme zapsat jako

$$-\alpha_n b^n + ... - \alpha_1 b + \alpha_0 = -\beta_n b^n - ... - \beta_1 b - \beta_0\,. \tag{3}$$

Všechny sčítance až na α_0, β_0 jsou násobky b a tedy aby rovnice dávala smysl, musí $\alpha_0 + \beta_0 \equiv 0 \pmod b$. Kvůli podmínce $\alpha_i \neq 0$ (resp. $\beta_j \neq 0$ pro sudá j) vidíme, že $\alpha_0 + \beta_0 \neq 0$. Zároveň $\alpha_i, \beta_j \leq b-1$ a tedy $\alpha_0 + \beta_0 < |2b|$. Tedy jediný způsob, jak může $\alpha_0 + \beta_0 \equiv 0 \pmod b$ platit, je pokud $\alpha_0 + \beta_0 = b$. Dosaďme nyní tuto rovnost

$$-\alpha_n b^n + ... - \alpha_1 b + b = -\beta_n b^n - ... - \beta_1 b\,.$$

Vydělmě oboje strany číslem b a použijme opět argument s dělitelností b, čímž dostáváme

$$-\alpha_1 + 1 + \beta_1 \equiv 0 \pmod b\,.$$

Díky podmínkám $\alpha_i \neq 0$ (resp. $\beta_j \neq b-1$ pro lichá j) a $\alpha_i, \beta_j \leq b-1$ máme nerovnosti $|-\alpha_1 + 1 + \beta_1| \leq b-1$. Neboli jediný způsob, jak může $-\alpha_1 + 1 + \beta_1 \equiv 0 \pmod b$ je pokud $-\alpha_1 + 1 + \beta_1 = 0$. Dosazením této rovnosti nazpátek dostáváme

$$-\alpha_n b^{n-1} + ... + \alpha_2 b = -\beta_n b^{n-1} - ... - \beta_2 b\,.$$

Když znovu vydělíme oboje strany číslem b

$$-\alpha_n b^{n-1} + ... - \alpha_3 b + \alpha_2 = -\beta_n b^{n-1} - ... - \beta_3 b - \beta_2\,,$$

dostaneme rovnost, která je až na indexy u cifer totožná s (3). Argument, který tedy platí po α_0, β_0 můžeme použít pro jakékoliv liché cifry α_{2k}, β_{2k}, a podobně můžeme použít argument, který platí pro α_1, β_1 pro jakékoliv sudé cifry $\alpha_{2\ell+1}, \beta_{2\ell+1}$. Pro všechna $k, \ell \in \{0, 1, ..., \frac{n-1}{2}\}$ platí tedy

$$\alpha_{2k} + \beta_{2k} = b, \qquad -\alpha_{2\ell+1} + 1 + \beta_{2\ell+1} = 0. \tag{4}$$

Jelikož $(-m)_{-b}$ je palindrom (resp. $(m)_b$ je antipalindrom), víme $\alpha_i = \alpha_{n-i}$ (resp. $\beta_j + \beta_{n-j} = b-1$). Díky lichosti n můžeme rovnosti (4) přepsat na tvar

$$\alpha_i + \beta_i = b, \qquad -\alpha_{n-i} + 1 + \beta_{n-i} = 0\,.$$

Sečtením rovností dostáváme

$$\alpha_i - \alpha_{n-i} = b - 1 - (\beta_i + \beta_{n-i})\,.$$

Všímavý čtenář si už jistě všiml, že pokud $\alpha_i = \alpha_{n-i}$ (resp. $b-1 = (\beta_i + \beta_{n-i})$), pak platí $b - 1 = \beta_i + \beta_{n-i}$ (resp. $\alpha_i = \alpha_{n-i}$), čímž je naše ekvivalence dokázána. ■

Věta 2. *Mějme* $(m)_b = \overline{a_{2n}a_{2n-1}...a_1a_0}$ *pak* $(m)_{-b} = \overline{(a_{2n}+1)(b-a_{2n-1})...(a_2+1)(b-a_1)a_0}$ *pro všechna* $a_n \in \{1, 2, ..., b-1\}$

Důkaz.

$$\sum_{j=0}^{2n} a_j b^j = \sum_{j=0}^{2n} a'_j (-b)^j$$

$$\sum_{j=1}^{n} b^{2j-1}(a_{2j}b + a_{2j-1}) + a_0 = \sum_{j=1}^{n} b^{2j-1}(a'_{2j}b - a'_{2j-1}) + a'_0$$

Protože $a_n \in \{1, 2, ..., b-1\}$, tak : $a_0 \not\equiv 0 \bmod b$, $b(a_2 b \pm a_1) \not\equiv 0 \bmod b^2$... $b^{2n-1}(a_{2n}b \pm a_{2n-1}) \not\equiv 0 \bmod b^{2n}$

$$a_{2j}b + a_{2j-1} = a'_{2j}b - a'_{2j-1}, a_{2j-1} + a'_{2j-1} = b(a'_{2j} - a_{2j})$$

Protože $a_{2j-1} + a'_{2j-1} \in \{2, 3...2b-2\} \wedge b | a_{2j-1} + a'_{2j-1}$ tak $a_{2j-1} + a'_{2j-1}$=b, z cehož vyplývá

$$a'_{2j} - a_{2j} = 1 \implies a'_{2j} = a_{2j} + 1, a'_{2j-1} = b - a_{2j-1}, a'_0 = a_0\,.$$

a tedy

$$a_0 = a'_0, a_2 b + a_1 = a'_2 b - a_1, ...a_{2n}b + a_{2n-1} = a'_{2n}b - a'_{2n-1}$$

Jesltiže $a_{2j-1} = 0$ pak $a'_{2j-1} = 0$ a $a'_{2j} = a_{2j}$, a pokud $a_{2j} = 0$ tak $a'_{2j} = 1$. Tímto jsou vyřešeny všechny možné případy ■

Pro některá čísla platí, že jsou palindromem v soustavě i soustavě jí opačné: např. číslo 5, u kterého $(5)_2 = (5)_{-2} = \overline{101}$. Tato čísla existují pouze v 3 tvarech:

1. triviální: $(m)_b = \overline{10a0a...a01}$, kde a je náhrada za číslici 0 nebo 1
2. $(m)_b = \overline{11...1}$
3. $(m)_b = \overline{1100...011}$

Důkaz 1: Na všech lichých pozicích platí, že $b^n = (-b)^n$, proto rozdíly čísel ovlivní pouze sudé pozice. Protože se na všech sudých pozicích nachází 0, první tvar platí.

Důkaz 2: Zjevně platí že:

$$\sum_{i=0}^{2n+1} b^i = b^{2n+2} + 1 + \sum_{i=1}^{n} 2b^{2i} + \sum_{j=1}^{n+1} (b-1)(-b)^{2j-1}$$

Z levé strany lze zjevně zapsat číslo $(m)_b = \overline{11...1}$. Z pravé vypývá, že první a poslední číslice jsou 1, ze $\sum_{i=1}^{n} 2b^{2i}$ že na ostatních lichých místech bude 2 a ze $\sum_{j=1}^{n+1}(b-1)(-b)^{2j-1}$ že na ostatních sudých místech bude b-1

4 Shrnutí

Během projektu jsme zjisitli, že palindromická čísla v kladných číselných soustavách jsou často zapsána jako antipalindromická v záporných. Také jsme zjisitli, v jakých případech je číslo palindromem v kladné číselné soustavě i palindromem v soustavě jí opačné.

Poděkování

Moc děkujeme organizátorům Týdne vědy na Jaderce, díky kterému jsme se mohli seznámit s tímto tématem. Dvakrát tak více děkujeme Adamovi Blažkovi za vedení našeho projektu a děkujeme Vám čtenářům za zájem o naše téma.

Reference

[1] DVOŘÁKOVÁ, Ľ.; KRUML, S.; RYZÁK, D. Antipalindromic numbers. *Acta Polytechnica*. 2021. Dostupné také z: https://doi.org/10.14311/AP.2021.61.0428. [cit. 2024-06-18].