

Počítačové algebraické systémy a jejich aplikace (nejen) ve fyzice

M. Kocourek¹, D. Něnička², M. Pavlíček³

¹Gymnázium Chotěboř; matejkocourek825@gmail.com

²Gymnázium Rožnov pod Radhoštěm; david.nenicka@email.cz

³Gymnázium Chotěboř; pavlicek.marek@centrum.cz

Garant: doc. Dr. Ing. Milan Šňor (KLFF FJFI)

Abstrakt

Cílem našeho projektu bylo seznámit se s počítačovými algebraickými systémy (PAS) a s jejich praktickým využitím v matematice, fyzice, ale i v chemii či ostatních vědách. Věnovali jsme se především programu Wolfram Mathematica, přičemž jsme se naučili základní operace a práci s ním. Při řešení rozmanitých problémů jsme se potkali i s umělou inteligencí, kdy jsme za pomoci modelu Claude 3 byli schopni získat ještě zajímavější výstupy.

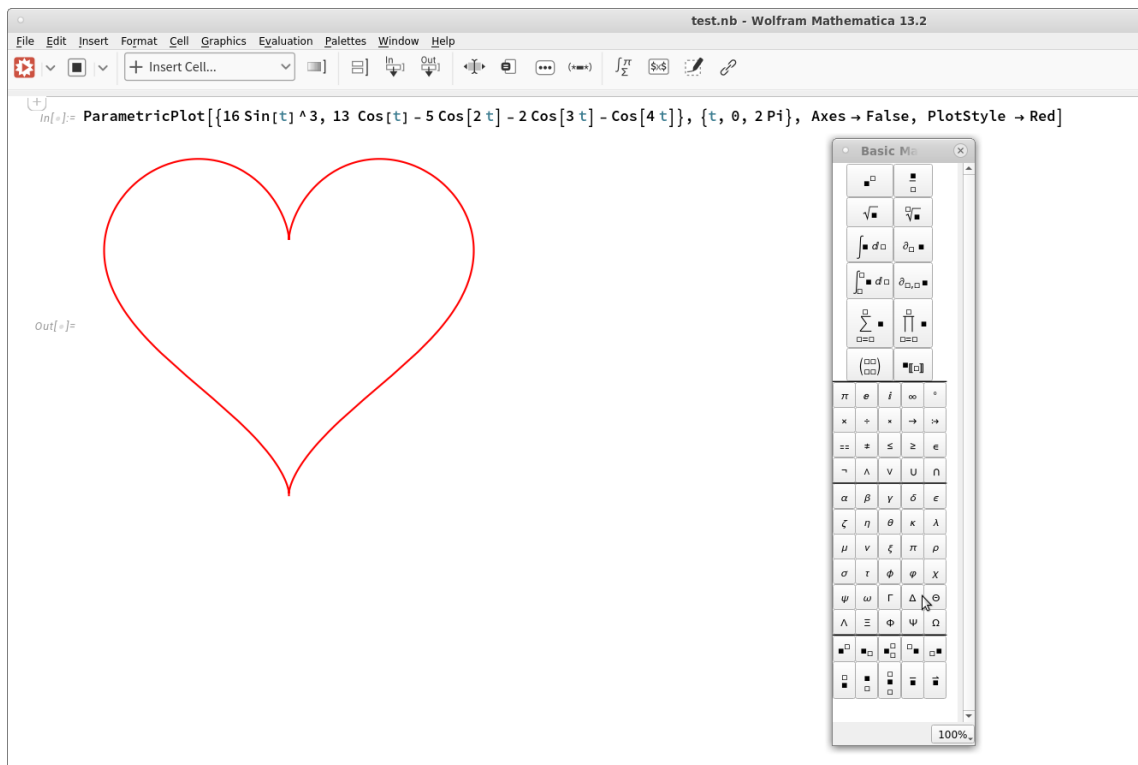
1 Úvod

Počítačové algebraické systémy jsou určeny především k řešení matematických problémů. Tyto programy tak umí řešit rovnice, zjednodušovat složité výrazy, počítat derivace, integrály či kreslit grafy funkcí. Programů tohoto druhu existuje celá řada, najdeme mezi nimi komerční i open-source možnosti. Mezi nejznámější programy patří již zmíněná Mathematica nebo například Matlab či Maple.

Počítačové algebraické systémy pracují přímo s tzv. symboly, což znamená, že zachovávají obecnost tak dlouho, dokud nepotřebujeme číselnou odpověď. Oproti numerickým programovacím jazykům, jako je například C++ či Python, jsme zde schopni dosáhnout prakticky neomezené přesnosti.

2 Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica je software, který se zabývá problematikou matematiky, ale dokáže vyřešit i praktické problémy z oblasti fyziky a dalších věd. Jedná se v podstatě o textový editor, do kterého vpisujeme matematické výrazy (např. předpisy funkcí, rovnice, nerovnice, derivace, integrály, matice, atd.), které chceme řešit. [1] Jako vstup bere tato aplikace speciální jazyk Wolfram Language. Na těchto základech stojí také Wolfram Alpha, populární AI nástroj. Mathematica si drží svou dobrou pozici na trhu zejména díky kombinaci velkého počtu funkcí a kvalitního, poměrně jednoduchého UI. Je vyvíjena společností Wolfram Research a v současnosti je dostupná už její čtrnáctá verze.



Obrázek 1: Ukázka uživatelského rozhraní Wolfram Mathematica

3 Využití v matematice

Jak již bylo řečeno, algebraické systémy mají výhodu oproti těm numerickým v tom, že dokáží vyjádřit výsledek s větší přesností. Dokáží analyticky vyřešit všechny typy rovnic, u kterých je toto řešení možné, a ty ostatní potom řeší numericky. [2] Příkladem je řešení kvadratické rovnice. Vstupní řádek programu vypadá následovně:

`Solve [a*x^2 + b*x + c == 0, x]`

a výstup vidíme na obrázku č. 2.

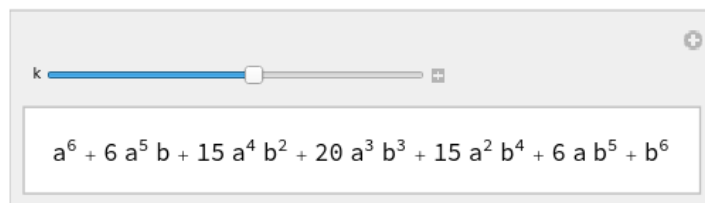
$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \right\}$$

Obrázek 2: Řešení kvadratické rovnice v programu Mathematica

Důležitou funkcí programu Mathematica je příkaz `Manipulate[]`, s jehož pomocí můžeme libovolně měnit parametry funkce nebo výrazu. To lze hezky demonstrovat na binomické větě při roznásobování výrazu $(a + b)^k$. Vstupem je v tomto případě příkaz

`Manipulate[Expand[(a + b)^k], {k, 1, 10, 1}],`

který nám říká, že za parametr k můžeme libovolně dosazovat celá čísla od 1 do 10. Pro $k = 6$ bude výstupem výraz na obrázku č. 3



Obrázek 3: Roznásobení závorky $(a + b)^6$ v programu Mathematica

Nedílnou součástí matematiky je také tvorba grafů. I v tomto je program Mathematica velmi dobrý nástroj pro usnadnění práce. Pro ukázkou si vezměme dvě funkce

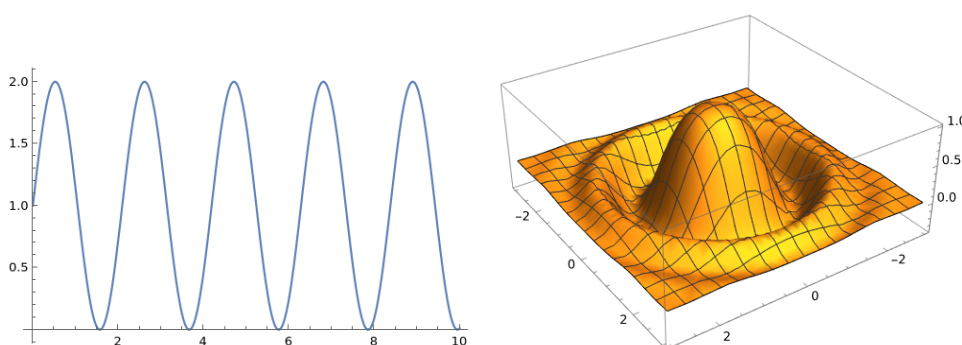
$$f_1(x) = \sin 3x + 1,$$

$$f_2(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \cdot e^{\frac{-x^2 - y^2}{3}}.$$

V Mathematice je vykreslíme pomocí příkazů `Plot[]` a `Plot3D[]`:

```
Plot[Sin[3 x] + 1, {x, 0, 10}],
Plot3D[Cos[x^2 + y^2]*Exp[(-x^2 - y^2)/3], {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
PlotRange -> All]
```

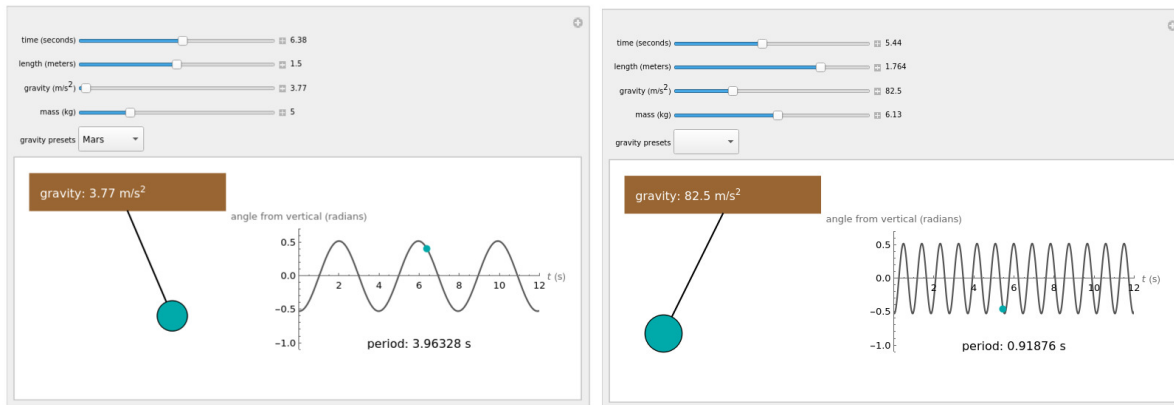
a získáváme dva grafy funkcí.



Obrázek 4: Grafy funkcí v programu Mathematica

4 Využití ve fyzice

Mathematica je schopna zvládnout prakticky všechny disciplíny fyziky – od mechaniky přes optiku, elektřinu až po kvantovou fyziku. Záleží jen na schopnostech jejího uživatele a na vstupu, který tento uživatel vytvoří. Ke sdílení kvalitních uživatelských projektů existuje databáze Wolfram Demonstrations Project, kde můžeme najít mnohá zajímavá využití jako např. simulaci působení gravitační síly na jednoduché kyvadlo, simulace různých elektrických obvodů, ale také Van de Graaffův generátor či Keplerovy zákony v praxi.



Obrázek 5: Ukázka vlivu gravitační síly na jednoduché kyvadlo [3]

5 Shrnutí

Počítačové algebraické systémy představují významný nástroj v oblasti symbolických (i numerických) výpočtů. Staly se už prakticky nedílnou součástí moderní vědy. Jejich neustále trvající vývoj a inovace v oboru budou i nadále posouvat hranice toho, co může být vypočítáno, analyzováno či vybadáno.

Poděkování

Děkujeme především panu doc. Dr. Ing. Milanu Šiňorovi, jenž nás tímto miniprojektem po celou dobu provázel. Naše díky patří také panu Ing. Vojtěchu Svobodovi, CSc; dále Karlu Kolářovi a všem, co se podíleli na organizaci letošního ročníku Týdne vědy na Jaderce.

Odkazy

- [1] A. Filkászová. *Matematický software a zpracování dat.*
<https://is.mvso.cz/th/yt926/bp.pdf>
- [2] Z. Buk. *Základy práce se systémem Mathematica.*
<http://www.mathematica-forum.cz/>
- [3] Wolfram Demonstrations Project. *Effect of Gravity on a Simple Pendulum.*
<https://demonstrations.wolfram.com/EffectOfGravityOnASimplePendulum/>