Wythoffova hra aneb dáma na nekonečné šachovnici

W. Bureš[1], M. Drexlerová[2], V. Lorenc[3], M. L. Skuda[4], V. Tureček [5]

[1]Polské G, Český Těšín; 18wojtek8@gmail.com
[2]G Rožnov pod Radhoštěm, Praha; drexlerova.monika@seznam.cz
[3]G Podbořany, Praha; percy0546@gmail.com
[4]G Boskovice; skuda.maxmilian@email.cz
[5]Masarykovo G, Plzeň; vladimir.turecek.188b@mgplzen.cz

Ľ. Dvořáková, školitelka; KM FJFI ČVUT

Abstrakt

Wythoffova hra pochází pravděpodobně z Číny, ale jméno nese po holandském matematikovi W. A. Wythoffovi[1], který v roce 1907 zveřejnil kompletní analýzu hry. V článku popíšeme dvě možné výherní strategie: pomocí rekurentní posloupnosti a pomocí zápisu čísel ve Fibonacciho soustavě.

Pravidla Wythoffovy hry

Představte si, že se před Vámi nacházejí dvě hromádky libovolně zvoleného počtu žetonů. Se svým protihráčem se střídáte v tazích probíhajících následujícím způsobem:

1. Vyberete si právě jednu z hromádek a odstraníte z ní libovolný počet žetonů.
2. Z obou hromádek zároveň odstraníte shodný počet žetonů.

Prohrává ten hráč, jenž na začátku svého tahu již nemá žádné žetony k odstranění.

Prohrávající a vyhrávající pozice

Zadefinujme rekurzivně vyhrávající a prohrávající pozice.

Definice 1. Nechť $(0;0) \in P$. Nechť $(x;y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,\ (x;y) \neq (0;0)$.

- $(x;y) \in V$, pokud existuje tah do P,
- $(x;y) \in P$, pokud všechny tahy vedou do V.

Prvkům P říkáme prohrávající pozice, prvkům z V vyhrávající pozice.[2]

Můžeme si všimnout, že platí: $P \cup V = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ a $P \cap V = \emptyset$; $(x;y) \in P \Leftrightarrow (y;x) \in P$.

[1]Willem Abraham Wythoff (1869–1939)

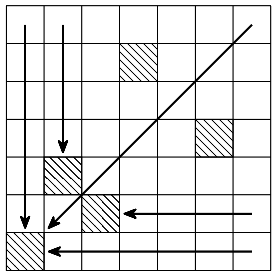
[2]Většina zdrojů používá značení $\mathcal{P}$ (previous) a $\mathcal{N}$ (next). $\mathcal{N}$ značí to samé co V a $\mathcal{P}$ opět značí prohrávající pozice. [1]

Příklad 1. Zahrajme si ukázkovou hru. Před námi se nachází hromádka x s 12 žetony a hromádka y s 20 žetony. To zapíšeme jako $(12; 20)$. Hra má tento průběh:

(12; 20) – (8; 16)
(8; 13) – (8; 5)
(3; 5) – (1; 3)
(1; 2) – (0; 1)

Partii zahajuje hráč A odebráním 4 žetonů z obou hromádek. Hráč B reaguje odstraněním 3 žetonů z hromádky y. Hráč A odebere ze stejné hromádky dalších 8 žetonů, na což jeho oponent odstraní 5 žetonů z hromádky x. Následuje odebrání 2 žetonů z každé hromádky hráčem A a jednoho žetonu z hromádky y hráčem B. Hráč A odstraní po jednom žetonu z obou hromádek a tím na stole zbude poslední žeton, který odebere hráč B. Jelikož na jeho soupeře již žádný žeton nezbyl, stává se vítězem hry.

Pokud umíme popsat P a dělat tahy z V do P, pak když soupeř začne v P, prohraje. Pokud začne ve V, ale nezná výherní strategii, může udělat tah do V, a poté vyhrajeme my.



Wythoffovu hru můžeme také interpretovat jako dámu pohybující se po nekonečné šachovnici. Může se však pohybovat pouze dolů, vlevo a diagonálně doleva dolů.

První výherní strategie: rekurentní posloupnost

Věta 1. *$P = \{(a_n; b_n), (b_n; a_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, kde*

- *$a_0 = b_0 = 0$,*
- *a_n pro $n \geq 1$ je nejmenší ještě nepoužité přirozené číslo,*
- *$b_n = a_n + n$.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	...
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	...

Tabulka 1: Počáteční členy posloupnosti a_n, b_n

Dále platí $a_n < a_{n+1}, b_n < b_{n+1}$. Navíc každé přirozené číslo je v tabulce 1 právě jednou.

Důkaz věty 1. Označíme množinu $\{(a_n; b_n), (b_n; a_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = A$. Pro důkaz, že $A = P$, stačí ověřit:

(a) $(0; 0) \in A$, $(0; 0) \in A$, protože $a_0 = b_0 = 0$.

(b) Pokud $(x; y) \notin A$, pak existuje tah do A. Pokud $(x; y) \notin A$, pak můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat, že $x < y$. Máme následující možnosti:

- $x = b_n$; $y > x > b_n > a_n$. Uberu $y - a_n$ z y a dostanu se do pozice $(x; y') = (b_n; a_n)$.
- $x = a_n$; $y > b_n$. Uberu $y - b_n$ z y a dostanu se do $(x; y') = (a_n; b_n)$.
- $x = a_n$; $y < b_n$. Uberu $a_n - a_k$, kde $k = y - x < n$, z obou a dostanu se do pozice $(a_k; b_k)$, protože $x - (a_n - a_k) = a_k$ a $y - (a_n - a_k) = (y - x) + a_k = k + a_k = b_k$.

(c) Pokud $(x; y) \in A$, pak všechny tahy vedou mimo A. Když uberu z a_n tak jsme v pozici $(x'; b_n)$, kde $x' < a_n$, b_n je však v tabulce 1 právě jednou, a to ve dvojici s a_n. Proto jsem mimo A. Podobně když uberu z b_n, nebo stejný počet z obou.

□

Příklad 2. K demonstraci zmíněných pravidel použijeme hru z příkladu 1, pouze s odlišným komentářem. Soupeř nás prvním tahem dostává do vyhrávající pozice, kterou díky druhé možnosti z (c) proměníme v prohrávající. Po jeho dalším tahu použijeme první možnost z (c), čímž opět vytvoříme prohrávající pozici. Po jeho dalším tahu používáme opět druhou možnost z (c). Z pozice (1; 2), vedou všechny soupeřovy tahy k naší výhře.

Druhá výherní strategie: Fibonacciho zápis čísel

Definice 2. Fibonacciho čísla jsou posloupností čísel splňujících $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Počáteční podmínky jsou $f_1 = 2$ a $f_0 = 1$. [3]

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Tabulka 2: Počátek rozvoje Fibonacciho čísel

Věta 2. *Každé $N \in \mathbb{N}$ lze zapsat ve Fibonacciho soustavě pomocí cifer 0 a 1, tj. $N = \sum_{k=0}^{j} a_k f_k$, kde $a_k \in \{0, 1\}, a_j \neq 0$.*

Platnost věty zaručuje hladový rozvoj. Pro číslo N se získá tak, že vždy najdeme největší Fibonacciho číslo f_j, které je menší nebo rovno danému N. Spočítáme zbytek $N - f_j$ a se zbytkem postupujeme stejně. $66 = 55 + 11 = 55 + 8 + 3 = f_8 + f_4 + f_2$.
Píšeme $(66)_F = 100010100$. $120 = 89 + 21 + 8 + 2$. Tudíž $(100)_F = (1001010010)$.

Takový rozvoj neobsahuje cifru 2 nebo vyšší, protože $2f_n > f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$, a neobsahuje po sobě jdoucí jedničky, protože $f_{n-1} + f_n = f_{n+1}$.

Věta 3. *$P = \{(s_n, l_n), (l_n, s_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, kde*

- $s_0 = l_0 = 0$.
- *(s_n) ostře roste a zápis s_n ve Fibonacciho soustavě končí sudým počtem nul.*
- *(l_n) ostře roste a zápis l_n ve Fibonacciho soustavě končí lichým počtem nul.*

n	0	1	2	3	4	5
s_n	0	$(1) = 1_F$	$(100) = 3_F$	$(101) = 4_F$	$(1001) = 6_F$	$(10000) = 8_F$
l_n	0	$(10) = 2_F$	$(1000) = 5_F$	$(1010) = 7_F$	$(10010) = 10_F$	$(100000) = 13_F$

Tabulka 3: Počáteční členy posloupnosti s_n a l_n

Navíc si lze povšimnout, že čísla v druhém řádku jsou stejná jako čísla v prvním, pouze s přidanou nulou na konci.

Důkaz věty 3. Označíme množinu $\{(s_n; l_n), (l_n; s_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = B$. Pro důkaz, že $B = P$, si stačí uvědomit:

[3] Počáteční podmínky jsou většinou definovány jako $F_1 = 1$ a $F_0 = 0$. Pro práci s rozvojem ve Fibonacciho soustavě musíme však definovat tyto podmínky tak, jak bylo v článku zmíněno.

(a) $(0; 0) \in B$.

(b) (s_n) a (l_n) ostře rostou.

(c) Každé přirozené číslo je rovno buď s_n, nebo l_n pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

(d) $l_n - s_n = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Body (a), (b) a (c) jsou jasné z definice množiny B. Bod (d) dokážeme tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje přirozené n, aby $l_n - s_n = n$. Najdeme $(n-1)_F = (a_j a_{j-1} ... a_1 a_0)$, zvolíme $(s)_{\tilde{F}} = (a_j ... a_1 a_0 1)$, $(l)_{\tilde{F}} = (a_j ... a_1 a_0 10)$. Pokud $a_0 = 1$, je $a_1 = 0$ a my přepíšeme $(a_j ... 011) \to (a_j ... 100)$, pokud opět vznikne 11, znovu přepíšeme. Dostaneme tím Fibonacciho rozvoj se sudým počtem nul na konci. Proto skutečně $s = s_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Podobně pro $l = l_n$. Ukažme, že $l_n - s_n = k = a_j f_{j+2} - a_j f_{j+1} + ... + a_0 f_2 - a_0 f_1 + f_1 - f_0 = a_j f_j + ... + a_0 f_0 + (2-1) = n - 1 + 1 = n$. □

Příklad 3. Na následující ukázce si demonstrujeme použití druhé výherní strategie. Začneme s dvojicí čísel (35; 40).

(35; 40) – (8; 13) (8; 10) – (3; 5) (2; 4) – (2; 1) (1; 1) – (0; 0)	Jsme na tahu. Větší číslo označme Y a menší z čísel označme X a převeďme ho do Fibonacciho soustavy. $35 = 34 + 1 \to (10000001) = (s_n)_F$. Přidáme tedy na konec nulu a získáme $(l_n)_F = (100000010)$, po převodu $(l_n)_F$ zpět do dekadické soustavy dostaneme 57.

Jelikož $l_n > Y > X$, index k zjistíme jako $k = Y - X \to k = 5$. Pakliže k zápisu $(k-1)_F$ přidáme nakonec číslici 1, tj. (1011), a přepíšeme ho do desítkové soustavy, získáme $s_k = 8$ a $l_k = s_k + k = 13$. Další dvojice čísel je tedy (8; 13). Soupeř odečte z druhé pozice 3, dostáváme (8; 10). Provedeme-li shodný postup jako v prvním tahu, obdržíme (3; 5). Protihráč nás uvede do pozice (2; 4). Pro výpočet prohrávající pozice převedeme 2 do Fibonacciho soustavy, a tedy $(2)_F = (10)$, proto $2 = l_j$, z toho $(s_j)_F = (1)$, tj. $s_j = 1$. Jelikož s_j je menší než hodnoty stávající pozice, nahradíme jím druhou pozici a vyjde dvojice čísel (2;1). Odtud již vede snadná cesta k výhře.

Poděkování

Rádi bychom poděkovali paní docentce Dvořákové za vedení celého projektu i za její neskonalou píli. Rovněž bychom rádi poděkovali panu doktoru Kolářovi za všechen čas, který strávil přípravou této akce.

Odkazy

1. VOPRAVIL, V. Nestranné hry. *Učitel matematiky.* 2018, roč. 26, č. 2. Dostupné také z: https://ojs.cuni.cz/ucitel/article/view/993.

2. WYTHOFF, W. A. A modification of the game of Nim. *Nieuw Arch. Wisk.* 1907, roč. 7, č. 2, s. 199–202.