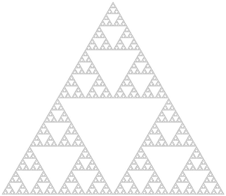
Fraktály

Ondřej Bouchala, George Dzhanezashvili, Viktor Skoupý

Týden vědy

21. 6. 2012

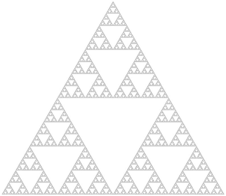


Co je to fraktál?

Co je to fraktál?

Definice

Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova míra je (ostře) větší než dimenze topologická.



Co je to fraktál?

Definice

Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova míra je (ostře) větší než dimenze topologická.

Definice

Hausdorffova míra je „nížedimenzionální“ míra na $\mathbb{R}^n$, která dovoluje měřit jisté „velmi malé“ podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Základní myšlenkou je, že množina je ”s-dimenzionální” podmnožina množiny $\mathbb{R}^n$, platí-li

$$0 < H^s(A) < \infty$$

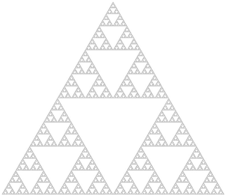
i když A je velmi komplikovaná. Hausdorffova míra je definovaná jako výraz obsahující součet průměrů dobrého spočetného pokrytí.

Co je to fraktál?

Co je to fraktál?

Definice

Fraktál je geometrický objekt, který:

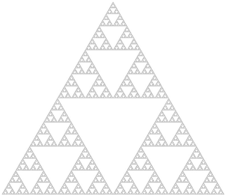


Co je to fraktál?

Definice

Fraktál je geometrický objekt, který:

- *Je soběpodobný (v různých měřítcích stejný motiv)*

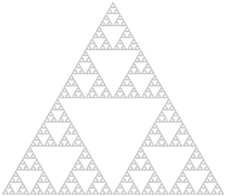


Co je to fraktál?

Definice

Fraktál je geometrický objekt, který:

- *Je soběpodobný (v různých měřítcích stejný motiv)*
- *Složitý tvar, avšak jednoduchá pravidla*



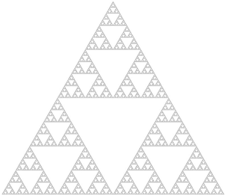
Co je to fraktál?

Definice

Fraktál je geometrický objekt, který:

- *Je soběpodobný (v různých měřítcích stejný motiv)*
- *Složitý tvar, avšak jednoduchá pravidla*

- Termín fraktál poprvé použil Benoît Mandelbrot (1924-2010) v roce 1975



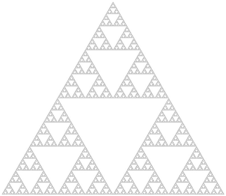
Co je to fraktál?

Definice

Fraktál je geometrický objekt, který:

- *Je soběpodobný (v různých měřítcích stejný motiv)*
- *Složitý tvar, avšak jednoduchá pravidla*

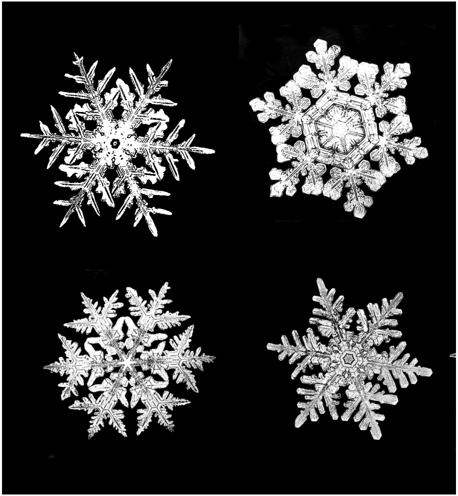
- Termín fraktál poprvé použil Benoît Mandelbrot (1924-2010) v roce 1975
- Z latinského fractus - rozbitý



Fraktály v přírodě

Fraktály v přírodě

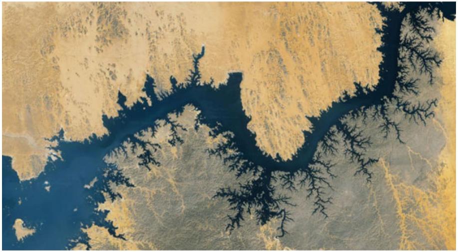
Fraktály v přírodě



Fraktály v přírodě

Fraktály v přírodě

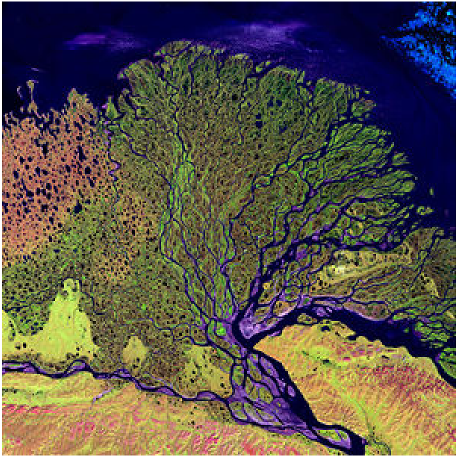
Fraktály v přírodě



Fraktály v přírodě

Fraktály v přírodě

Fraktály v přírodě



Úvod do komplexních čísel

Úvod do komplexních čísel

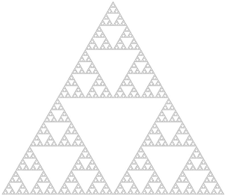
- Rozšíření reálných čísel

Úvod do komplexních čísel

- Rozšíření reálných čísel
- $i^2 = -1$

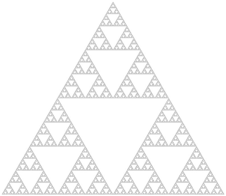
Úvod do komplexních čísel

- Rozšíření reálných čísel
- $i^2 = -1$
- $z = a + bi$



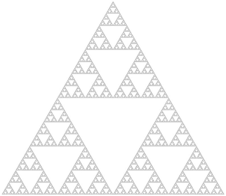
Úvod do komplexních čísel

- Rozšíření reálných čísel
- $i^2 = -1$
- $z = a + bi$
- $z^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2$



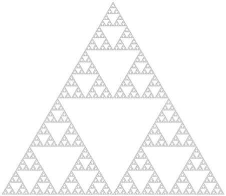
Úvod do komplexních čísel

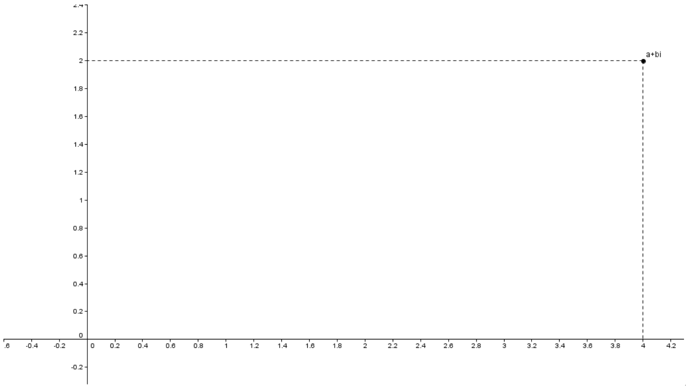
- Rozšíření reálných čísel
- $i^2 = -1$
- $z = a + bi$
- $z^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 - b^2 + 2abi$



Úvod do komplexních čísel

- Rozšíření reálných čísel
- $i^2 = -1$
- $z = a + bi$
- $z^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
- Zobrazují se do komplexní roviny




a+bi
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.2 2.4 2.6 2.8 3 3.2 3.4 3.6 3.8 4 4.2

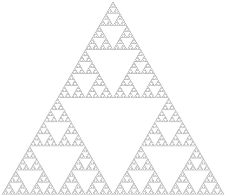
Fraktální dimenze

Fraktální dimenze

- Fraktální dimenze nemusí být celočíselná

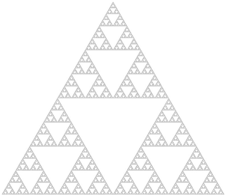
Fraktální dimenze

- Fraktální dimenze nemusí být celočíselná
- Popisuje „složitost“ fraktálu



Fraktální dimenze

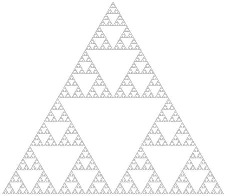
- Fraktální dimenze nemusí být celočíselná
- Popisuje „složitost“ fraktálu
- Více druhů



Soběpodobnostní dimenze

Soběpodobnostní dimenze

- Pouze pro ryze soběpodobné fraktály

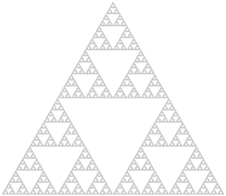


Soběpodobnostní dimenze

- Pouze pro ryze soběpodobné fraktály

Definice

O fraktálu říkáme, že je ryze soběpodobný, pokud ho lze rozdělit na několik shodných částí, kde každá z těchto částí je zmenšená kopie celku.



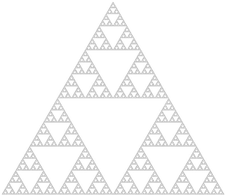
Soběpodobnostní dimenze

- Pouze pro ryze soběpodobné fraktály

Definice

O fraktálu říkáme, že je ryze soběpodobný, pokud ho lze rozdělit na několik shodných částí, kde každá z těchto částí je zmenšená kopie celku.

- Útvar rozdělíme na a částí



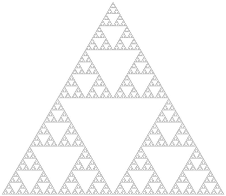
Soběpodobnostní dimenze

- Pouze pro ryze soběpodobné fraktály

Definice

O fraktálu říkáme, že je ryze soběpodobný, pokud ho lze rozdělit na několik shodných částí, kde každá z těchto částí je zmenšená kopie celku.

- Útvar rozdělíme na a částí
- Každá s-krát menší



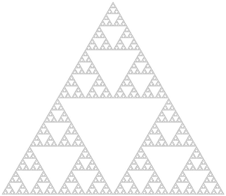
Soběpodobnostní dimenze

- Pouze pro ryze soběpodobné fraktály

Definice

O fraktálu říkáme, že je ryze soběpodobný, pokud ho lze rozdělit na několik shodných částí, kde každá z těchto částí je zmenšená kopie celku.

- Útvar rozdělíme na a částí
- Každá s-krát menší
- $D := \frac{\ln(n)}{\ln(s)}$



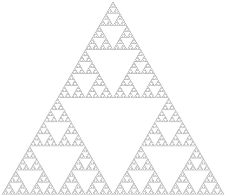
Mřížková dimenze

Mřížková dimenze

- Jednoduchá pro programování

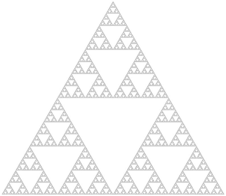
Mřížková dimenze

- Jednoduchá pro programování
- Mřížka s různým měřítkem



Mřížková dimenze

- Jednoduchá pro programování
- Mřížka s různým měřítkem
- D se rovná rychlosti růstu (derivaci) $\ln(N(s))$ v závislosti na $\ln(s)$



Juliova množina

Juliova množina

- Posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$ nediverguje

Juliova množina

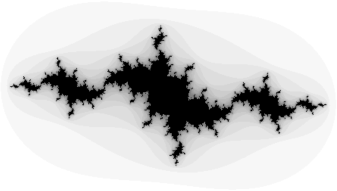
- Posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$ nediverguje
- z_0 – souřadnice na komplexní rovině

Juliova množina

- Posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$ nediverguje
- z_0 – souřadnice na komplexní rovině
- c – konstanta stejná pro celou množinu

Juliova množina

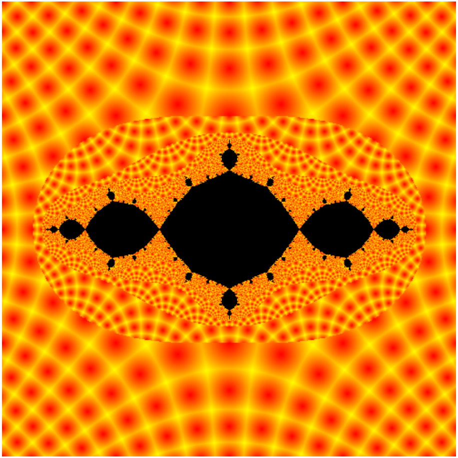
- Posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$ nediverguje
- z_0 – souřadnice na komplexní rovině
- c – konstanta stejná pro celou množinu



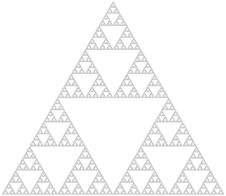
$c = -1.125 + 0.216i$

Juliova množina

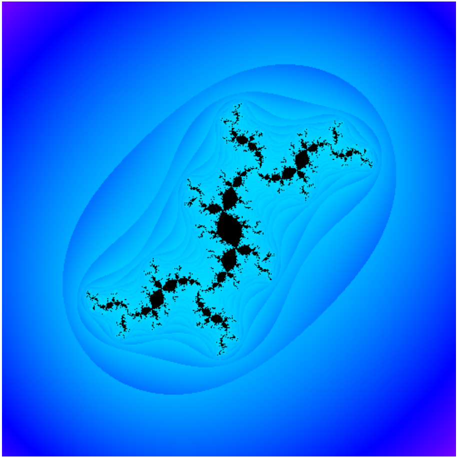
Juliova množina



$c = -1$



Juliova množina



$$c = -0.03 - 0.79i$$

Prahový poloměr divergence

Prahový poloměr divergence

- Máme k dispozici pouze konečný počet iterací

Prahový poloměr divergence

- Máme k dispozici pouze konečný počet iterací
- Pokud $|z_n| > \max\{|c|, 2\}$, posloupnost diverguje

Důkaz

Důkaz

Předpoklady

- $|z| > r(c) = \max\{2, |c|\}$

Důkaz

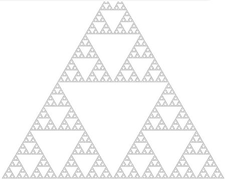
Předpoklady

- $|z| > r(c) = \max\{2, |c|\}$
- $r(c) >= 2$

Důkaz

Předpoklady

- $|z| > r(c) = \max\{2, |c|\}$
- $r(c) >= 2$
- $|z| > |c|$



Důkaz

Předpoklady

- $|z| > r(c) = \max\{2, |c|\}$
- $r(c) >= 2$
- $|z| > |c|$
- $|z| = r(c) + \epsilon$

Důkaz

Důkaz

$$|z^2| = |z^2 + c - c|$$

Důkaz

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

Důkaz

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

$|z^2 + c| \geq |z^2| - c$

Důkaz

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - c = |z|^2 - c$$

Důkaz

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - c = |z|^2 - c \geq |z|^2 - |z|$$

Důkaz

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - c = |z|^2 - c \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1)$$

Důkaz

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - c = |z|^2 - c \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) =$$

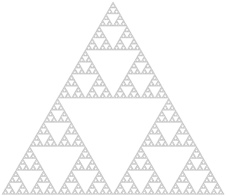
$$= |z|(r(c) + \epsilon - 1)$$

Důkaz

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - c = |z|^2 - c \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) =$$

$$= |z|(r(c) + \epsilon - 1) \geq |z|(2 + \epsilon - 1) = |z|(1 + \epsilon)$$



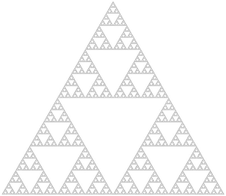
Důkaz

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - c = |z|^2 - c \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) =$$

$$= |z|(r(c) + \epsilon - 1) \geq |z|(2 + \epsilon - 1) = |z|(1 + \epsilon)$$

$$\ddot{o}\pi\epsilon\rho\ \ddot{\epsilon}\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\tilde{\iota}\xi\alpha\iota$$



Důkaz

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

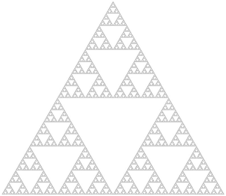
$$|z^2 + c| \geq |z^2| - c = |z|^2 - c \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) =$$

$$= |z|(r(c) + \epsilon - 1) \geq |z|(2 + \epsilon - 1) = |z|(1 + \epsilon)$$

$$\ddot{o}\pi\epsilon\rho\ \ddot{\epsilon}\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\tilde{\iota}\xi\alpha\iota$$

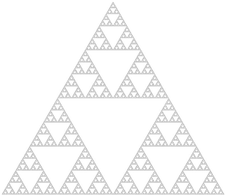
Podobnou úvahou by se to dalo zobecnit pro exponent n. Pak by ale mezní hodnotou bylo číslo $\max\{\sqrt[n-1]{2}, |c|\}$.

Sierpinského těsnění



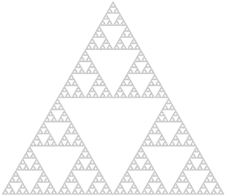
Sierpinského těsnění

- Poprvé popsán v roce 1915 polským matematikem Wacławem Sierpińskim



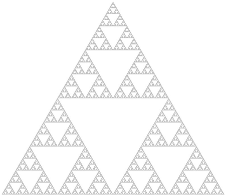
Sierpinského těsnění

- Poprvé popsán v roce 1915 polským matematikem Wacławem Sierpińskim
- Pascalův trojúhelník



Sierpinského těsnění

- Poprvé popsán v roce 1915 polským matematikem Wacławem Sierpińskim
- Pascalův trojúhelník
- Hanoiské věže



Sierpinského těsnění

Program

Mandelbrotova množina

Mandelbrotova množina

- Posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$ nediverguje

Mandelbrotova množina

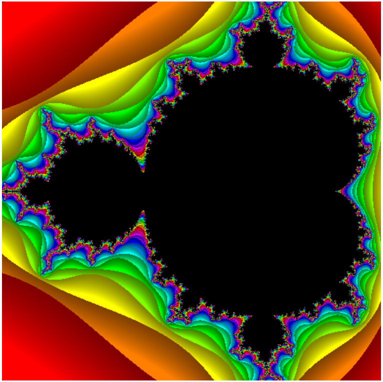
- Posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$ nediverguje
- $z_0 = 0$

Mandelbrotova množina

- Posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$ nediverguje
- $z_0 = 0$
- c – souřadnice na komplexní rovině

Mandelbrotova množina

- Posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$ nediverguje
- $z_0 = 0$
- c – souřadnice na komplexní rovině



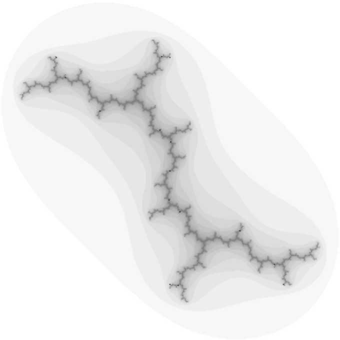
Mandelbrotova množina

Program

Obarvování

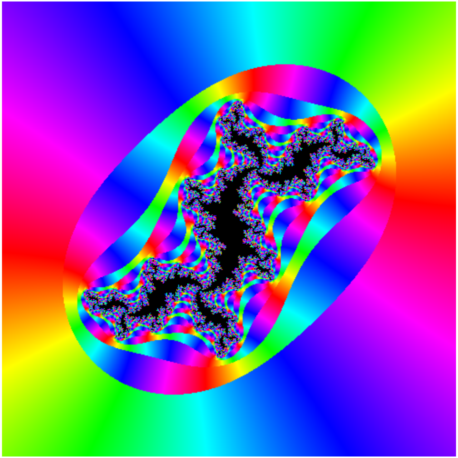
Obarvování

Únikový algoritmus



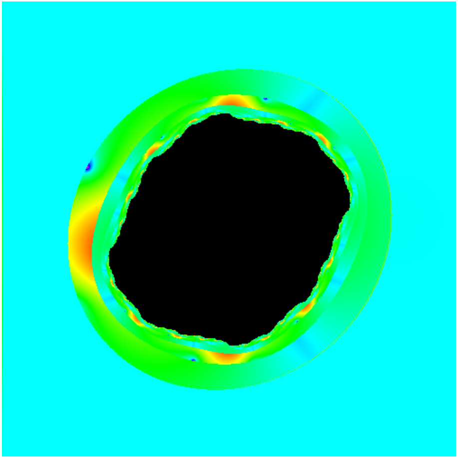
Obarvování

Únikový úhel



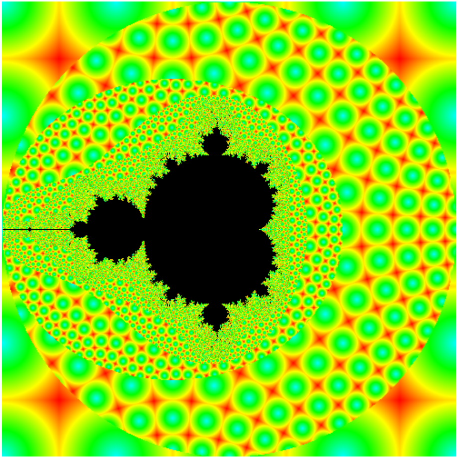
Obarvování

Odhad zakřivení



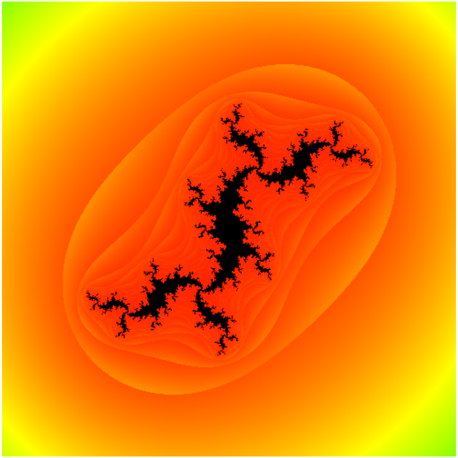
Obarvování

Gaussova celá čísla



Obarvování

Průměr absolutních hodnot



Děkujeme za pozornost

Děkujeme za pozornost

Literatura:

- Petr Pauš – Počítačové generování fraktálních množin (2004).