Matematický popis hopsajících kuliček v diskrétní mřížce

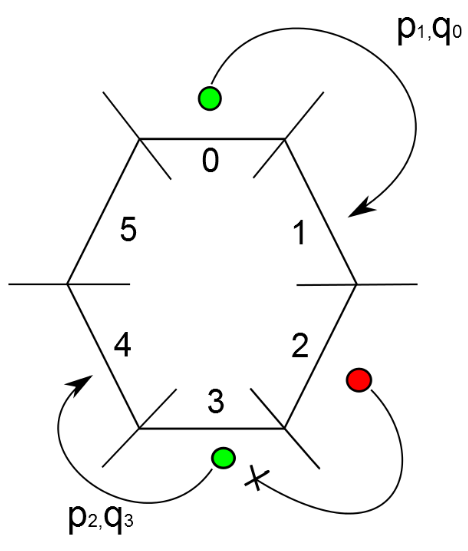
Barbora Kopalová[1], Adam Neckář[2], Pavel Jakoubě[1]
[1]Gymnázium Tanvald, Školní 305, Tanvald
[2]Gymnázium Jiřího Ortena, Jaselská 932, Kutná Hora
bara.kop@volny.cz, adam.neckar9@gmail.com, jakoubep@seznam.cz

Abstrakt

Zkoumali jsme jednoduchý dopravní model pomocí teorie Markovových řetězců v diskrétním čase. Pomocí matice přechodu jsme našli stacionární řešení a zkoumali jsme hustotní rozložení a relativní četnost výskytu konfigurací. Věnovali jsme se hlavně dvěma situacím: 1. rychlost vozidla se mění podle vzdálenosti k nejbližšímu (ve směru jízdy), 2. rychlost vozidla se mění podle kvality vozovky.

1 Úvod - definice modelu

Zabýváme se jednoduchým pohybem tří částic, které mají nadefinované parametry p_1 ,p_2, p_3 (zajišťující interakci mezi vozidly), v šesti buňkách s parametry $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$ (které zajišťují interakci vozidel a vozovky). Částice se pohybují ve směru hodinových ručiček, jak je znázorněno na obrázku 1.



Obrázek 1: Definice modelu

Částice se pohybují podle těchto pravidel:

- Částice se pohybují přeskokem do sousední buňky
- V jedné buňce může být nejvýše jedna částice
- Částice, která má před sebou k volných buněk, přeskočí s pravděpodobností p_k
- Každá buňka b má vlastní parametr q_b, který ovlivňuje pravděpodobnost výskoku z této buňky
- V každém kroku náhodně vybereme buňku; pokud je tato buňka obsazená částicí, která má před sebou volno, pak přeskočí s pravděpodobností $p_k \cdot q_b$

2 Teorie

K problému budeme přistupovat pomocí teorie Markovových řetězců s diskrétním časem, viz [1]. Markovovým řetězcem rozumíme náhodnou posloupnost $(X_n; n \geq 0)$, kde n je čas a X_0 zaznamenává výchozí stav s_0. Rovnost $X_n = s_n$ znamená, že v čase n nastane stav s_n. Stavy s bereme z množiny $S = \{1, 2, ..., |S|\}$. Aby výše zmíněná posloupnost byla markovská, musí $\forall\ i, j \in S$ platit

$$\Pr[X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = s_{n-2}, ..., X_0 = s_0] = \Pr[X_n = j | X_{n-1} = i]\,, \tag{1}$$

což znamená, že pravděpodobnost $X_n = j$ závisí pouze na předchozím stavu $X_{n-1} = i$. Pro zjednodušení uvažujme, že pravděpodobnost z rovnice (1) nezávisí na n, můžeme tedy psát $\Pr[X_n = j | X_{n-1} = i] = \Pr[i \to j] =: P_{ij}$. P_{ij} označuje pravděpodobnost, že systém v dalším kroku přejde ze stavu i do stavu j. P_{ij} jsou prvky matice přechodu P, kde i označuje řádek a j sloupec.

Pravděpodobnost, s jakou se systém v čase n nachází ve stavu s ($\Pr(X_n = s)$) spočítáme pomocí

$$v_n = v_0 \cdot P^n\,, \tag{2}$$

kde vektor $v_n = (\Pr(X_n = 1), \Pr(X_n = 2), ..., \Pr(X_n = |S|))$.

Pokud necháme systém vyvíjet se dostatečně dlouho ($n \to +\infty$), pravděpodobnosti se ustálí. Toto se nazývá stacionární řešení, které označíme v. Vektor v získáme jako řešení rovnice

$$v = v \cdot P\,. \tag{3}$$

3 Matematický popis modelu

Pomocí definice modelu sestavíme množinu konfigurací systému $S = \{111000, 110100, ...\}$, kde 0 označuje prázdnou buňku a 1 buňku s částicí. Počet všech možných konfigurací je $\binom{6}{3} = 20$. Jsou čtyři typy konfigurací, ostatní jsou jejich rotace, jak je znázorněno v tabulce 1

Dle pravidel můžeme přesně zjistit pravděpodobnost přechodu např.

$$P_{111000;110100} = P_{1;7} = \frac{p_3 \cdot q_2}{6} \tag{4}$$

Ze stacionárního řešení v získáme hustotu (střední obsazenost buňky) v dané buňce b

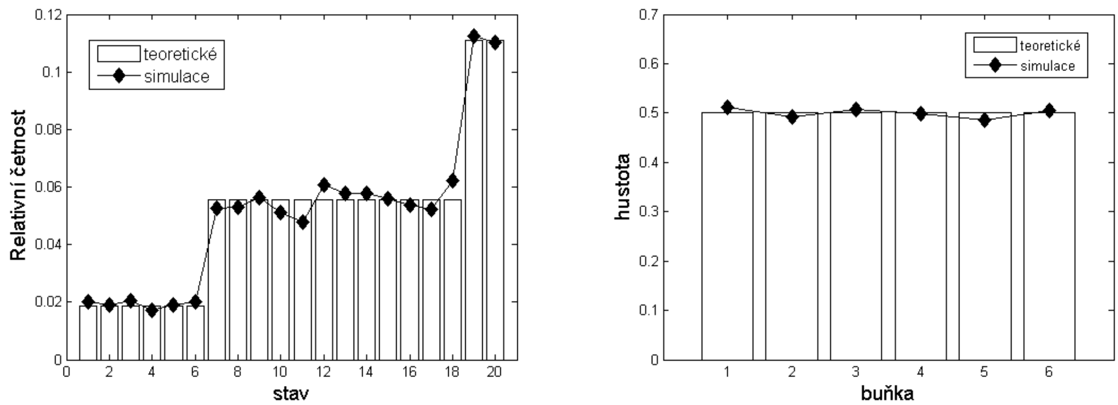
$$\varrho(b) = \sum_{s \in S} s(b) \cdot v(s) = \sum_{s \in S} s(b) \cdot \Pr[X_n = s] \tag{5}$$

Typ konfig.	111000	110100	110010	101010
Čísla konfig.	1-6	7-12	13-18	19,20

Tabulka 1: Základní konfigurace

4 Příklady

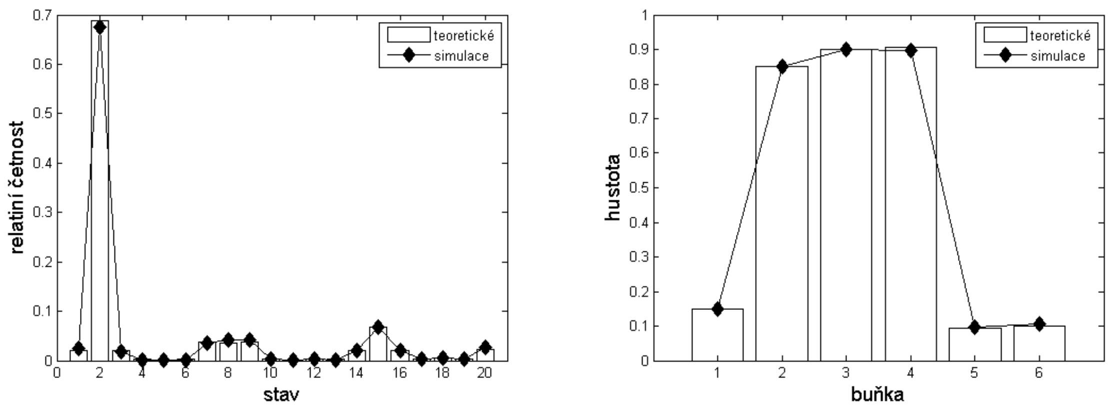
Příklad 1: Podívejme se na grafy relativní četnosti a hustoty pro parametry $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,6$ a $\forall\ b$, $q_b = 1$ (viz obrázek 2). $q_b = 1$ znamená, že na vozovce se nenachází žádná překážka a má stejnou kvalitu. Čím větší je mezera před vozidlem, tím větší je parametr p_k (tedy roste pravděpodobnost pohybu vozidla).



Obrázek 2: Relativní četnost (vlevo) a hustota v buňkách (vpravo) pro př. 1

Nejpravděpodobnější jsou konfigurace 19 a 20 (číslování viz tabulka 1) s pravděpodobností 0,1110. Další nejčetnější konfigurace jsou 7 až 18 s pravděpodobností 0,0556 a nejméně četné jsou 1 až 6 s pravděpodobností 0,0185. Hustota je ve všech buňkách stejná $\varrho(b) = \frac{1}{2}$.

Příklad 2: Parametry jsou $p_k = 1$ a $q_1 = 1$ $q_2 = 1$ $q_3 = 0,1$. Parametr $q_3 = 0,1$ odpovídá defektu vozovky (a tedy nutnému zpomalení).



Obrázek 3: Relativní četnost (vlevo) a hustota v buňkách (vpravo) pro př. 2

Z grafu vyčteme, že nejpravděpodobnější konfigurace jsou 2 (011100) s pravděpodobností 0,689 a 15 (101100) s prav. 0,0689, protože se za čtvrtou (s $q_3 = 0,1$) vytvoří kongesce, a tedy buňky 2,3,4 budou mít vyšší hustotu.

5 Diskuze a závěr

Na obrázcích 2 a 3 jsou výsledky vycházející z teorie (sloupce) i simulací (kosočtverce), které spolu korespondují. Je tedy vidět, že teorie Markovových řetězců je efektivním nástrojem k řešení modelu hopsajících kuliček v diskrétní mřížce.

Na příkladu jedna jsme zjistili, že zmenšování rychlosti (způsobené malou vzdáleností vozidel) způsobí, že nejpravděpodobnějšími konfiguracemi jsou 19 a 20, protože částice jsou zde rozloženy nejrovnoměrněji. Nejméně pravděpodobné konfigurace jsou 1 - 6, kde jsou tři částice za sebou. Zpomalení či zabrždění tedy snižuje možnost kongesce.

Příklad číslo dvě ukázal, jak defekt vozovky ovlivní vznik dopravní zácpy. Auta se nejdéle zdržovala v koloně na buňkách 1,2,3, v důsledku toho zde byla větší hustota.

Poděkování

Především bychom chtěli poděkovat našemu supervizorovi Pavlu Hrabákovi, za skvělou konzultaci, grandiozní trpělivost a kávu, která za moc nestála. Děkujeme rovněž FJFI ČVUT v Praze a všem organizátorům Týdne vědy.

Reference

[1] Z. Prášková, P. Lachout. *Základy náhodných procesů*. Praha: Karolinum, 1998.

[2] M. Hanzelka, V. Rozhoň. *Matematický popis systémů interagujících částic*. Sborník TV@J 2013, 2013.