

# Zkoumání turbulentního proudění v závislosti na viskozitě kapaliny

M. Štula, Gymnázium a SOŠPg Jeronýmova, Liberec  
*matej.stula@gmail.com*

J. Zárybnický, Gymnázium Olomouc-Hejčín  
*kuba.zarybnicky@post.cz*

Z. Venerová, Gymnázium, Brno, Křenová 36  
*zora.venerova@gmail.com*

S. Duarte, Gymnázium Christiana Dopplera, Praha  
*se.duarte001@gmail.com*

## Abstrakt

Simulace proudění tekutin pomocí Navier-Stokesových rovnic je jedním z hlavních témat výzkumu v oboru numerických metod. My jsme zkoumali vliv jedné z fundamentálních vlastností takových simulací, Reynoldsova čísla, které jsme měnili změnou vazkosti tekutiny, na turbulence v proudění. V naší práci jsme potvrdili, že existuje přímá závislost mezi vazkostí tekutiny a turbulencemi, které v ní vznikají.

## 1 Úvod

Řešení Navier-Stokesových rovnic je dnes hlavním způsobem simulace chování tekutin. Uplatňuje se například během návrhu dopravních prostředků, při předpovědi počasí, návrhu elektráren nebo při analýze znečištění prostředí.

Protože je ale tyto rovnice možné řešit analyticky pouze v jednoduchých případech, je nutné použít numerické metody [1, 2]. My jsme při práci jsme použili OpenFOAM, což je volně dostupný systém pro CFD (Computational Fluid Dynamics), numerické simulace dynamiky tekutin.

Cílem naší práce bylo potvrdit závislost výskytu turbulencí v proudění na Reynoldsově čísla, přičemž jsme použili jeden ze známějších problémů tohoto oboru, tzv. *lid-driven cavity flow*.

## 2 Teorie

Matematický model tekutin je postaven na Navier-Stokesových rovnicích:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2)$$

Toto je podoba Navier-Stokesových rovnic pro nestlačitelné proudění, a tedy podoba, se kterou jsme pracovali v naší simulaci. Vektorové pole rychlosti  $\vec{u}$  a tlak  $p$  závisí na čase a  $\nu$  je konstantní viskozita tekutiny.

K takovým rovnicím je možné dospět kombinací zákonů zachování hmoty a hybnosti. Nesimulují ale chování jednotlivých částic, ale pracují tekutinou jako se spojitou látkou, proto se nedají použít pro simulaci sonického třesku při překročení rychlosti zvuku v médiu [3].

První člen rovnice (1) pouze označuje změnu rychlosti podle času a je závislý na všech ostatních členech. Druhý člen představuje konvektivní zrychlení. Tento člen způsobuje nejvíce složitosti s rovnicemi a bez něj by byly jednodušeji řešitelné. Třetí člen je takzvaný disipační člen: čím vyšší viskozita tekutiny, tím více si budou sousední částice předávat rychlost. Čtvrtý člen pouze znamená, že tekutina teče z míst s velkým tlakem do míst s menším tlakem. Rovnice (2) zde představuje podmínku neslačitelnosti tekutiny.

My jsme zkoumali vliv Reynoldsova čísla, což je bezrozměrná veličina, která je charakteristickou vlastností simulace. Jsou v ní započítány všechny hlavní parametry proudění a lze z ní posoudit, nakolik bude proudění turbulentní. Čím větší je hodnota  $Re$ , tím turbulentnější bude proudění. Dá se vyjádřit takto:

$$Re = \frac{VL}{\nu}. \quad (3)$$

$V$  je zde charakteristická rychlost tekutiny,  $L$  zde představuje charakteristickou délku, která závisí na konkrétní geometrii simulace, a  $\nu$  je viskozita tekutiny.

V naší práci nás zajímala hodnota  $\nu$ . Pokud necháme ostatní hodnoty konstantní, je  $Re$  nepřímo úměrné viskozitě.

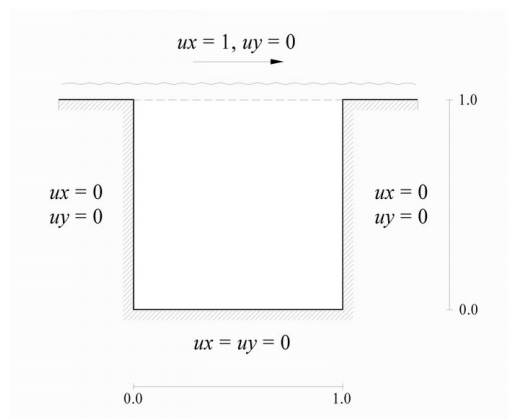
## 3 Simulace

### 3.1 Postup

V naší práci jsme použili volně dostupný program pro numerickou simulaci dynamiky tekutin OpenFOAM a program ParaView pro analýzu výsledků. Pro naši simulaci jsme použili dobře prozkoumaný problém, který se nyní používá i pro testování nových simulačních programů, tzv. *lid-driven cavity flow*.

Model objektu jsme měli už nachystaný (viz obr. 1), a tak jsme pouze upravovali jednotlivé parametry. Úlohu jsme řešili v 2D prostoru, ale OpenFOAM je možné použít i na 3D modely, a tak jsme tomu museli přizpůsobit svou práci.

Hlavním parametrem, který ovlivňoval kvalitu simulace bylo rozlišení sítě, které bylo  $160 \times 160 \times 1$  buněk (OpenFOAM pracuje ve 3D).



Obrázek 1: Kavita použitá v naší simulaci

Z důvodu výpočetní náročnosti jsme nemohli simulace provést delší nebo přesnější. Hodnoty, pro které jsme zkoumali vliv viskozity, byly  $\nu = 10^n$ , kde  $n \in \{-7, \dots, -1\}$ .

Pomocí terminálu jsme spustili výpočty a čekali na výsledky. Následně jsme je analyzovali v programu ParaView, pomocí kterého jsme je mohli jednoduše vizualizovat.

## 3.2 Výsledky

Zde uvádíme výsledky všech sedmi simulací, jako zobrazení velikosti rychlosti v programu ParaView (viz obr. 2). Do hodnoty  $Re = 10^5$  se vytvoří ustálený stav, pak pro  $Re = 10^6$  a  $Re = 10^7$  se už ustálený stav nevytvoří.

## 3.3 Diskuze

Zajímali jsme se o vliv viskozity a Reynoldsova čísla na sílu turbulentního proudění. Z vizualizace průběhů vyplývá, že proudění s nejvyšší hodnotu viskozity, a tedy nejnižším Reynoldsovým číslem, mají tendenci k tvoření ustáleného proudění, zatímco proudění s velmi nízkou viskozitou mají tendenci setrvávat v chaotickém turbulentním stavu.

Přechod z proudění, která mohou tvořit ustálený stav, na turbulentní proudění by měl nastat okolo  $Re = 10^5$ , což se nám potvrdilo.

## 4 Shrnutí

V naší práci jsme pracovali se simulacemi pomocí Navier-Stokesových rovnic. Zkoumali jsme vliv velikosti Reynoldsova čísla a viskozity na turbulence v proudění kapaliny, a to za použití simulačního systému OpenFOAM a programu pro analýzu výsledků, ParaView.

Potvrdili jsme, že takový vztah existuje, a že kolem hodnoty  $R = 10^5$  se v simulaci už nevytvoří ustálený stav.

## Poděkování

Děkujeme za vysvětlení problematiky a obětavou pomoc při vypracovávání našeho díla Tomáši Oberhuberovi, Petru Bauerovi a Vítězslavu Žabkovi.

Dále také děkujeme čínské restauraci Zlatá hvězda za poskytnutí azylu během vyčerpávající práce. Nakonec děkujeme Vojtěchu Svobodovi za přijmutí pětistránkové práce do sborníku.

## Reference

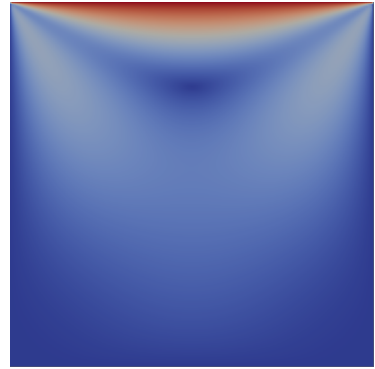
- [1] Yuen, M., *Analytical Solutions to the Navier-Stokes Equations*. ArXiv, 2008.
- [2] Thambynayagam, R. K. M., *An analytic solution of the non-stationary Navier-Stokes equation in three dimensions*. ArXiv, 2014.
- [3] Haglund, G. T., *Analysis of sonic boom measurements near shock wave extremities for flight near Mach 1.0 and for airplane accelerations*. National Aeronautics and Space Administration, 1974.



(a)  $Re = 10^1, t = 10^{-4}$



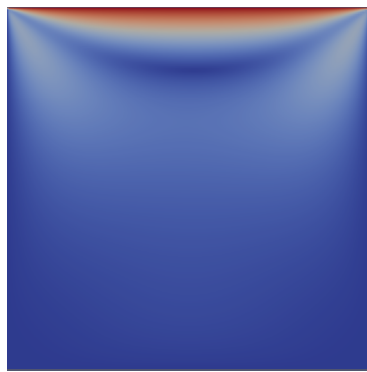
(b)  $Re = 10^1, t = 10^{-3}$



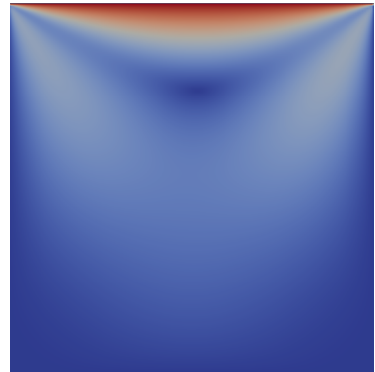
(c)  $Re = 10^1, t = 6 \cdot 10^{-3}$



(d)  $Re = 10^2, t = 10^{-4}$



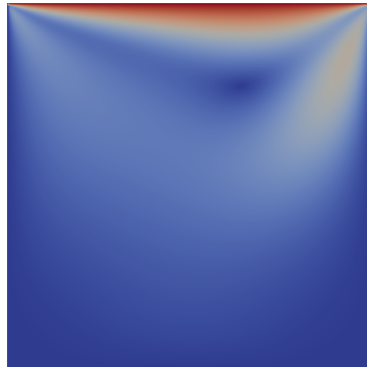
(e)  $Re = 10^2, t = 10^{-2}$



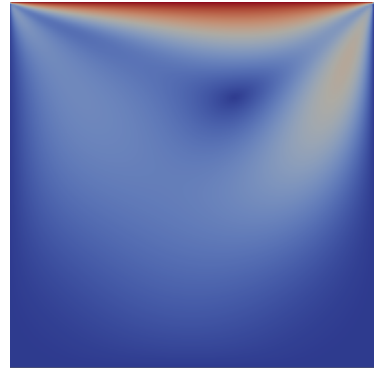
(f)  $Re = 10^2, t = 5 \cdot 10^{-2}$



(g)  $Re = 10^3, t = 10^{-4}$



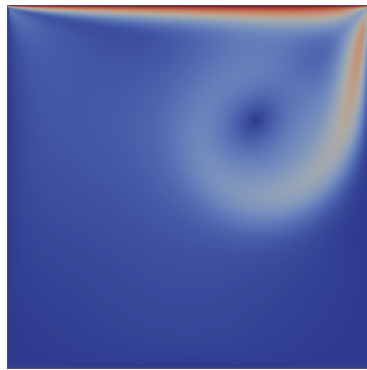
(h)  $Re = 10^3, t = 10^{-2}$



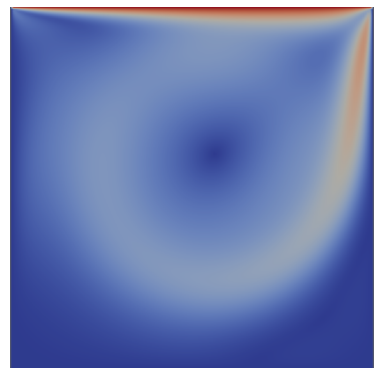
(i)  $Re = 10^3, t = 10^{-1}$



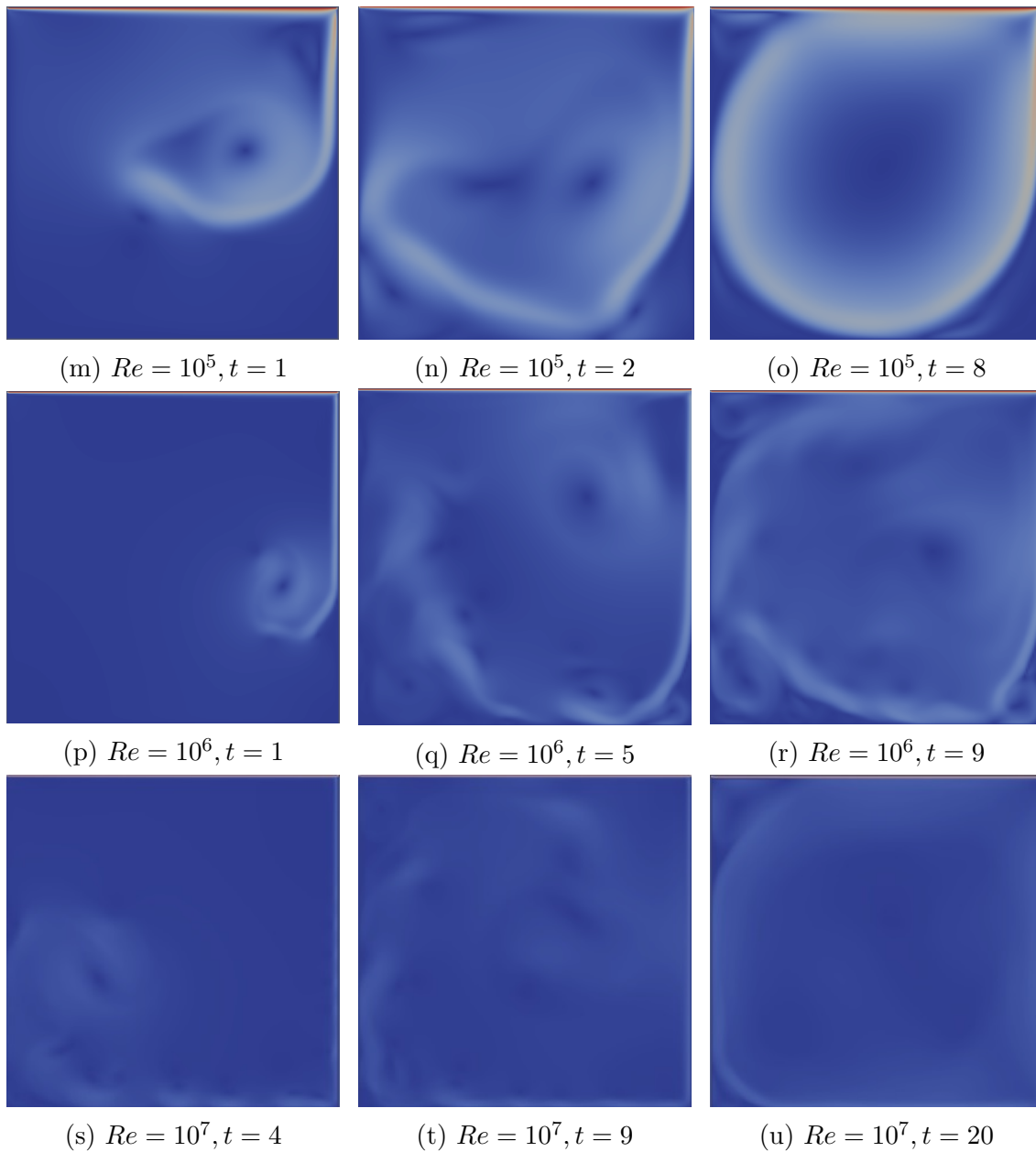
(j)  $Re = 10^4, t = 10^{-2}$



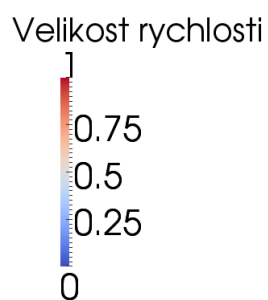
(k)  $Re = 10^4, t = 0.5$



(l)  $Re = 10^4, t = 1.2$



Obrázek 2: Výsledky simulací



Obrázek 3: Škála, exportovaná z ParaView, použitá při vizualizaci