Výpočet obsahu plošných obrazců metodou Monte Carlo

J. Löwit, Gymnázium Českolipská, Praha
jakub.lowit@gmail.com
J. Matěna, Gymnázium Českolipská, Praha
matenajakub@gmail.com
J. Novotná, Gymnázium, Chomutov
jane.novotna@seznam.cz
L. Švamberová, Gymnázium Na Pražačce, Praha
lucie.svamberova@seznam.cz

Abstrakt

V tomto miniprojektu jsme se věnovali výpočtům obsahů ploch obrazců. Porovnávali jsme použití metody Monte Carlo, obdélníkové metody a integrace. Metodu Monte Carlo jsme použili jak pro případy, kde lze snadno vypočítat integrál, tak i tam, kde použití integrace není možné.

Pro obdélníkovou metodu jsme používali programovací jazyk C++, pro metodu Monte Carlo jazyk C# a pro vykreslování grafů Maple a Gnuplot.

1 Úvod

V různých odvětvích vědy a techniky často potřebujeme znát obsahy různých ploch. Ve většině případů je nejsnazší a nejpřesnější metoda integrování. U složitých funkcí, které neumíme zintegrovat, lze použít obdélníkovou metodu (ta však na rozdíl od integrace není zcela přesná). Metoda Monte Carlo je kromě těchto případů využitelná také tehdy, když není integrály ani obdélníkovou metodu možné použít, např. v případě uzavřených křivek. I metoda Monte Carlo ale je pouze přibližná.

Naším cílem bylo ověřit efektivitu obdélníkové metody a metody Monte Carlo ve srovnání s integrací a v případě metody Monte Carlo také stanovit směrodatnou odchylku pro větší počet měření.

2 Metody

Určitý integrál

Určitý integrál označujeme symbolem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Udává obsah plochy, která je ohraničena grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$.

Obdélníková metoda

V případě obdélníkové metody konstruujeme obdélníky, které se jedním svým daným bodem horní hrany (např. levý nebo pravý kraj) dotýkají grafu funkce a jsou stejně „široké“ (viz obrázek 1). Plochu pod grafem křivky získáme jako součet obsahů těchto obdélníků. Čím jsou obdélníky „užší“ (a tedy jich je větší počet), tím je metoda přesnější.

Pokud by takových obdélníků bylo nekonečně mnoho, blížila by se výsledná plocha určitému integrálu.

Monte Carlo

Metoda Monte Carlo je pravděpodobnostní metoda, používaná kromě výpočtu obsahů ploch i v mnoha dalších odvětvích, např. v biologii, částicové fyzice či u hazardních her.

Obecný princip spočívá v určení střední hodnoty z náhodně generovaných čísel. Konkrétně u plošných útvarů to provádíme tak, že daný útvar ohraničíme plochou, jejíž obsah umíme vypočítat, a poté počítačem generujeme body a zjišťujeme, zda bod leží uvnitř daného útvaru či nikoli. Následně postupujeme podle vztahu

$$S_{\mathrm{obr}} = S_{\mathrm{oblast}} \frac{N_{\mathrm{in}}}{N_{\mathrm{celkem}}},$$

kde S_{obr} je hledaný obsah plochy, S_{oblast} je obsah plochy, která ohraničuje daný útvar, N_{in} je počet vygenerovaných bodů, které jsou podmnožinou daného útvaru, a N_{celkem} je celkový počet vygenerovaných bodů.

Dále je pro metodu Monte Carlo možné odvodit směrodatnou odchylku [1]. Pokud jako N označíme celkový počet vygenerovaných bodů, chová se odchylka jako

$$\frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{1}$$

nezávisle na počtu dimenzí. Znamená to, že pokud počet generovaných bodů zvýšíme např. stokrát, zmenší se odchylka zhruba desetkrát.

3 Výsledky

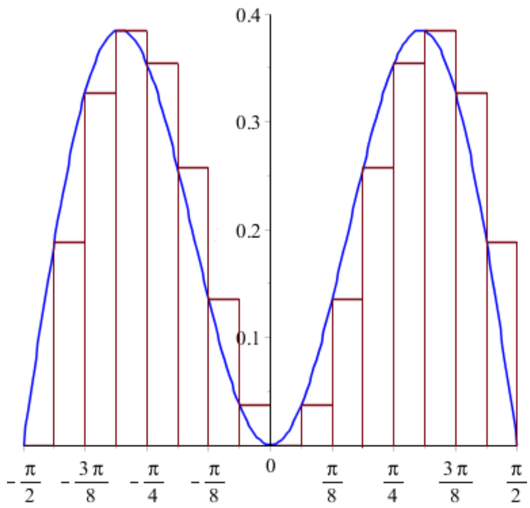
Plocha pod křivkou. Měli jsme dánu funkci

$$f(x) = \sin^2(x)\cos(x), \tag{2}$$

kterou lze zintegrovat a zjistit tak přesný obsah plochy. Pro určitý integrál platí

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Poté jsme určovali obsah plochy pod tímto grafem pomocí obdélníkové metody. Výsledky našich měření jsou v tabulce 1.



Obr 1. Obdélníková metoda pro (2), použito dělení na 16 obdélníků.

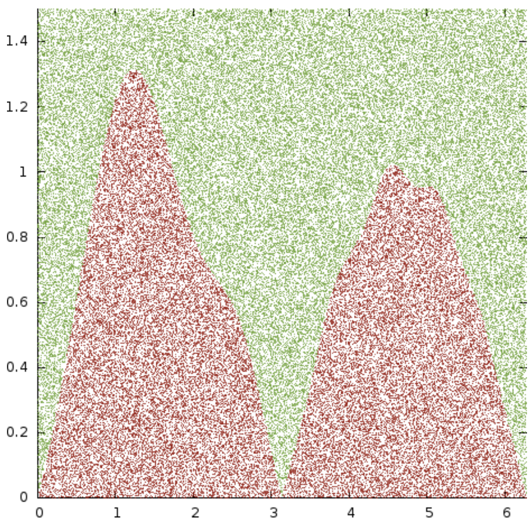
# obdélníků	součet ploch
100	0,666505
200	0,666627
300	0,66665
400	0,666656
500	0,66666
600	0,66666
700	0,666664
800	0,666662
900	0,666664
1000	0,666665

Tab 1. Výsledky obdélníkové metody

Plocha pod křivkou podruhé. Druhá zadaná funkce

$$f(x) = \exp\left(\frac{\sin(x^2)}{(x+0{,}5)^2}\right)|\sin(x)| \tag{3}$$

je složitější a neumíme ji zintegrovat. Zde jsme porovnávali metodu Monte Carlo a obdélníkovou metodu.



Obr 2. Monte Carlo pro (3), body pod křivkou jsou tmavší barvou

# obdélníků	součet ploch
100	4,31628
200	4,31654
300	4,31657
400	4,31659
500	4,3166
600	4,31659
700	4,31662
800	4,31665
900	4,31657
1000	4,31657

Tab 2. Výsledky obdélníkové metody

Při určování plochy metodou Monte Carlo jsme zvyšovali počet generovaných bodů a pro každý počet prováděli deset opakování. Výsledky jsou v tabulce 3. Ve sloupcích jsou různé počty bodů a v řádcích jednotlivá opakování. E je aritmetický průměr deseti pokusů, který považujeme za náš výsledek, σ je směrodatná odchylka. Z tabulky vidíme, že hodnoty směrodatné odchylky se chovají přibližně jako (1).

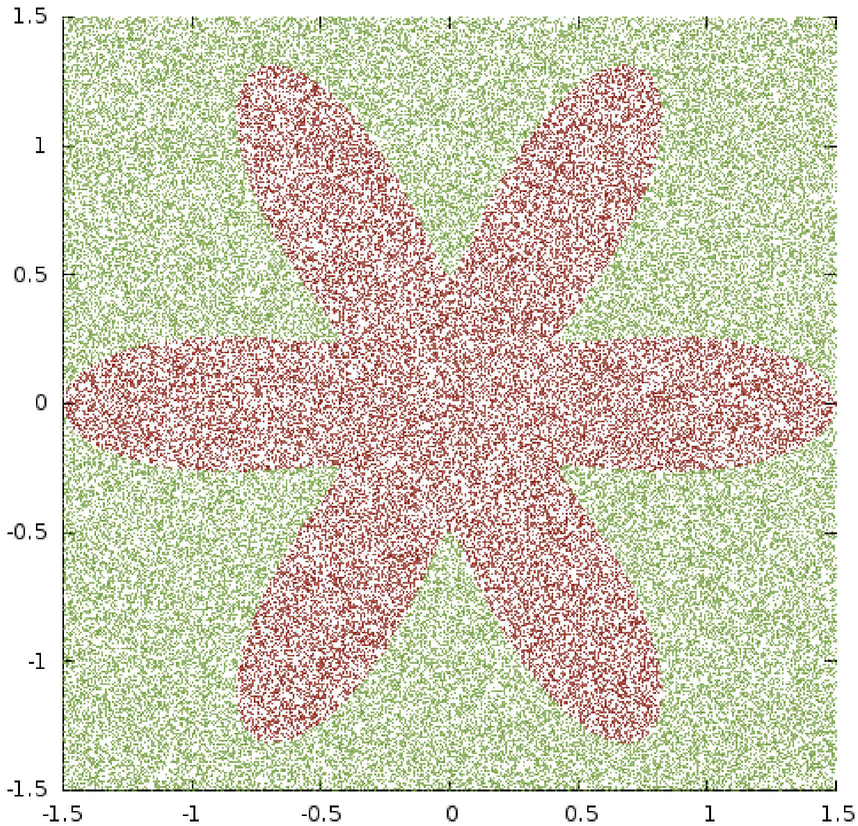
	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
1.	5,6549	5,2779	4,1846	4,3222	4,3352	4,3201	4,3159	4,3171
2.	6,5973	3,9584	4,2788	4,3250	4,3380	4,3222	4,3162	4,3167
3.	6,5973	4,5239	4,4673	4,4287	4,3313	4,3134	4,3175	4,3173
4.	4,7124	4,3354	4,1092	4,2430	4,3433	4,3129	4,3148	4,3170
5.	2,8274	4,2412	4,2506	4,3203	4,3169	4,3182	4,3177	4,3168
6.	2,8274	4,1469	4,3637	4,3806	4,3168	4,3126	4,3140	4,3164
7.	5,6549	3,8642	4,2129	4,3618	4,3241	4,3150	4,3139	4,3159
8.	5,6549	4,9951	4,2223	4,2525	4,3224	4,3123	4,3162	4,3157
9.	5,6549	4,0527	4,1563	4,1969	4,2934	4,3104	4,3183	4,3163
10.	1,8850	3,8642	4,3637	4,3505	4,3319	4,3097	4,3177	4,3163
E	4,8066	4,3260	4,2609	4,3182	4,3253	4,3147	4,3162	4,3165
σ	1,6022	0,4548	0,1038	0,0662	0,0135	0,0040	0,0015	0,0005

Tab 3. Výsledky Monte Carlo pro (3)

Plocha uvnitř křivky. Ve třetím případě jsme měli zadanou uzavřenou křivku o rovnici

$$x^2 + y^2 = \left(1 + 0{,}5 \cos\left(6 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right)^2 . \tag{4}$$

Obsah její plochy jsme počítali pouze s užitím metody Monte Carlo, ostatní metody nelze použít.



Obr 3. Monte Carlo pro (4)

	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
1.	4,2000	3,3600	3,3768	3,5087	3,5445	3,5357	3,5351	3,5342
2.	2,5200	3,3600	3,5700	3,4633	3,5292	3,5423	3,5348	3,5345
3.	0,8400	3,1080	3,6372	3,5078	3,5062	3,5373	3,5335	3,5336
4.	4,2000	3,8640	3,5280	3,4927	3,5230	3,5322	3,5333	3,5350
5.	3,3600	3,2760	3,3684	3,5196	3,5332	3,5346	3,5340	3,5349
6.	5,0400	3,5280	3,6540	3,4986	3,5357	3,5333	3,5334	3,5346
7.	1,6800	3,6960	3,6708	3,5524	3,5397	3,5287	3,5329	3,5348
8.	2,5200	3,6960	3,5616	3,5599	3,5519	3,5290	3,5335	3,5342
9.	2,5200	3,7800	3,6204	3,5759	3,5454	3,5331	3,5342	3,5346
10.	1,6800	2,8560	3,5532	3,5272	3,5550	3,5422	3,5360	3,5342
E	2,8560	3,4524	3,5540	3,5206	3,5364	3,5348	3,5341	3,5344
σ	1,2572	0,3039	0,1009	0,0324	0,0138	0,0045	0,0009	0,0004

Tab 4. Výsledky Monte Carlo pro (4)

4 Závěr

Vyzkoušením jmenovaných tří metod jsme ověřili, že při velkém počtu obdélníků je obdélníková metoda velmi přesná, a velmi přesná je i metoda Monte Carlo při velkém počtu generovaných bodů. Došli jsme k tomu, že pokud lze danou funkci integrovat, je integrál nejpřesnější metodou výpočtu plochy. Pokud máme funkci, kterou zintegrovat neumíme, je obdélníková metoda výhodnější. Metoda Monte Carlo je pro tyto případy časově nejnáročnější, ale v některých případech jde o jedinou možnost výpočtu plochy.

Poděkování

Rádi bychom poděkovali našemu supervisorovi Ing. Petrovi Ambrožovi, Ph.D. za seznámení s tématem miniprojektu a pomoc při jeho zpracovávání. Dále bychom chtěli poděkovat organizátorům Týdnu vědy na Jaderce za možnost realizování tohoto miniprojektu.

Reference

[1] Stefan Weinzierl, *Introduction to Monte Carlo Methods*, Nikhef Lecture Notes (2000), ArXiv: http://arxiv.org/abs/hep-ph/0006269

[2] Vojtěch Jarník, *Integrální počet (I)*, Academia Praha (1984)