Výpočet obsahu plošných obrazců metodou Monte Carlo

David Žáček
Gymnázium Christiana Dopplera, Praha

Nikola Kalábová
Friedrich-Schiller Gymnasium, Pirna

Daniel Hausner
Gymnázium a SOŠ Plasy

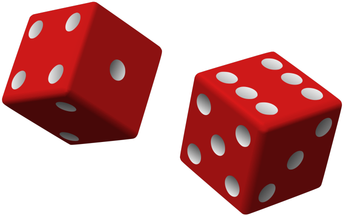
Štěpán Malec
SPŠ a VOŠ Kladno

18. ročník TV@FJFI 2016

Úvod

Metoda Monte Carlo

- Monte Carlo jsou metody výpočtů využívající náhodu.
- Lze je použít pro mnoho účelů, tam kde nejde nebo není výhodné použit deterministický postup.
- My jsme se zabývali Monte Carlo integrací – určováním plochy obrazce.

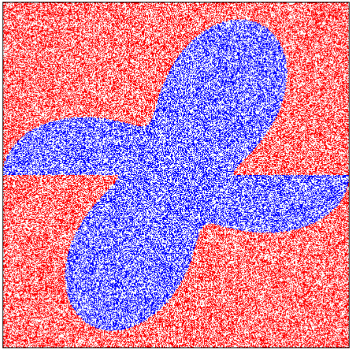


Monte Carlo integrace

Popis metody

Odhadne obsah plošného obrazce:

- Obrazec vykreslíme do plochy o známém obsahu S.
- Generátorem náhodných čísel „střílelíme" do známé plochy a zjišťujeme, zda „výstřel" zasáhl vnitřek obrazce.



- Poměr zásahů ku výstřelům je pak zlomek plochy S, kterou obrazec zabírá

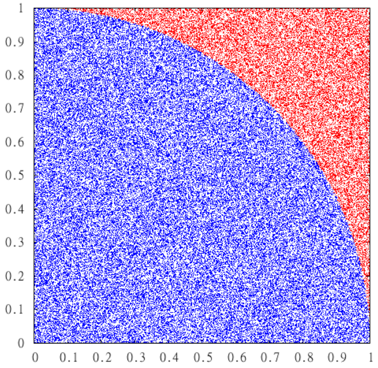
$$S_{\text{obraz}} = \frac{P_{\text{uvnitř}}}{P_{\text{vše}}} S.$$

Výpočet π

Postup

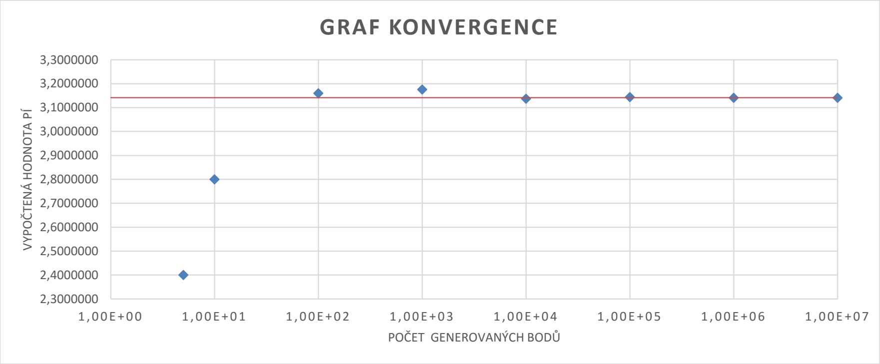
- π lze určit mnoha způsoby, jedním z nich je integrace Monte Carlo.
- Z geometrických vztahů můžeme vyjádřit π jako $4S_{\text{čtvrtkruhu}}$.

N	**výsledek**	**odchylka**
5	2,4000000	0,7415927
10	2,8000000	0,3415927
100	3,1600000	0,0184073
1000	3,1760000	0,0344073
10000	3,1368000	0,0047927
100000	3,1436400	0,0020473
1000000	3,1408040	0,0007887
10000000	3,1407524	0,0008403



Výpočet π

Graf



Funkce $\sin^3 x \cos^2 x$

Možnosti

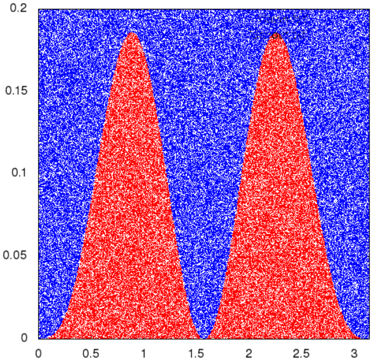
- Tuto funkci umíme zintegrovat a získat přesný obsah plochy pod křivkou
$$\int_0^\pi \sin^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{4}{15} = 0{,}2\bar{6}.$$

- Obsah plochy pod grafem funkce jsme spočítali pomocí tří metod a výsledky jsme porovnali.

Funkce $\sin^3 x \cos^2 x$

Metoda Monte Carlo – Postup řešení

- Vygenerujeme náhodné dvojice (x, y) reprezentující body v ploše.
- Pro každou dvojici zjistíme jestli platí $y < \sin^3 x \cos^2 x$.



Funkce $\sin^3 x \cos^2 x$

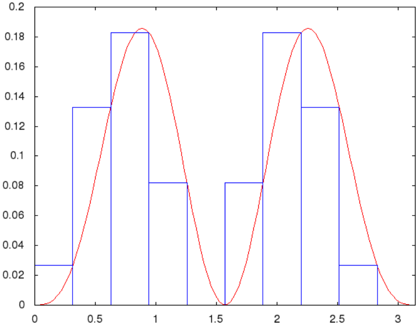
Metoda Monte Carlo – výsledky, průměr 10 měření

Body	Vypočtená hodnota	Směrodatná odchylka
1	0,314159	0,331153
10	0,301593	0,097339
10^2	0,252584	0,031597
10^3	0,265088	0,011678
10^4	0,267299	0,003314
10^5	0,266799	0,000924
10^6	0,266670	0,000270
10^7	0,266630	0,000128

Funkce $\sin^3 x \cos^2 x$

Obdélníková metoda – Postup řešení

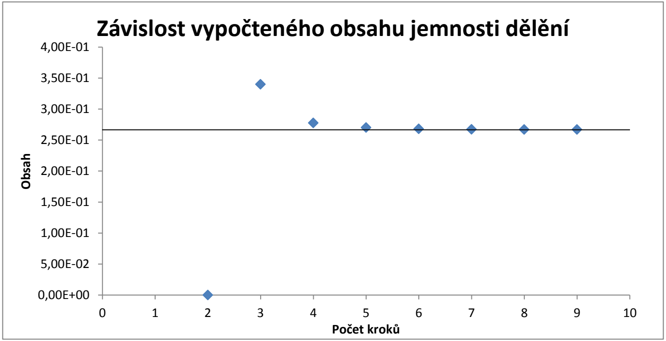
- Meze funkce si rozdělíme na určitý počet stejných úseků (šířku označíme h).
- Obsah získáme jako součet ploch obdélníků o šířce h a výšce odpovídající příslušné funkční hodnotě.
- Přesnost výpočtu je závislá na šířce jednoho úseku – čím užší, tím je výsledek přesnější.



Funkce $\sin^3 x \cos^2 x$

Obdélníková metoda – výsledky

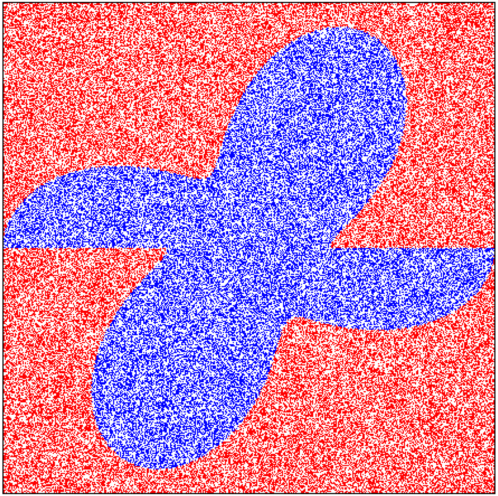
h	Obsah
2	$1{,}55 \cdot 10^{-13}$
3	0,340087
4	0,27768
5	0,270252
6	0,268218
7	0,267455
8	0,267112
9	0,266938



Implicitní patvar $x^2 + y^2 < \left(1 + \frac{1}{2}\sin(3\arctan\frac{x}{y})\right)^2$

Tady už pomůže jen Monte Carlo

39,1% plochy



Závěr

- Monte Carlo je metoda která není nejrychlejší ani nejpřesnější, ale umožňuje řešit i jinak těžko řesitelné úlohy.
- Lze ji využít i pro určení obsahu (nejen) plošných obrazců.
- Věřte náhodě!