Když nechceme derivovat, použijeme mýdlo

D. Burianová[1], K. Grohmannová[2], D. Komárek[3], T. Špičáková[4], M. Žůrek[5]
[1]Bilingválne gymnázium Milana Hodžu, Sučany; [2]Gymnázium Hejčín, Olomouc; [3]Masarykovo gymnázium, Příbor; [4]Gymnázium Brno-Řečkovice, Brno; [5]Gymnázium Františka Palackého, Valašské Meziříčí
[1]dianaburianova@centrum.sk; [2]sixka@seznam.cz; [3]dankomarek@seznam.cz; [4]spicakova.tereza@gmail.com;[5]zurekmvm@seznam.cz

Abstrakt:
Cílem našeho experimentu bylo najít nejkratší spojnici všech vrcholů v rovinném obrazci. Spočítali jsme tuto délku pomocí diferenciálního počtu a následně jsme své výsledky porovnávali s experimentem.

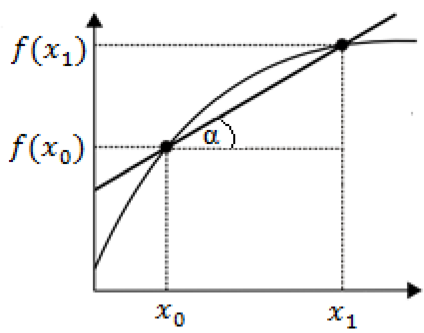
1 Úvod

Našim cílem bylo přijít na způsob, jak můžeme vytvořit nejkratší možnou spojnici vrcholů v rovinném obrazci (čtverec, trojúhelník). K tomu nám značnou měrou pomohla jedna z charakteristických vlastností kapalin. Obecně řečeno, částice se snaží zaujmout stav o nejnižší energii. Stejně se chová i kapalina jako celek. V našem experimentu jsme využili toho, že námi vytvořená bublina natažená mezi vrcholy obrazce samovolně přechází do stavu o nejnižší energii a povrchu. Problém jsme následně řešili také hledáním minima funkce pomocí derivace.

2 Derivace

Derivace je základem diferenciálního počtu. Je to směrnice tečny grafu funkce v daném bodě.
Pokud graf lineární funkce svírá s osou x úhel α, pak platí:

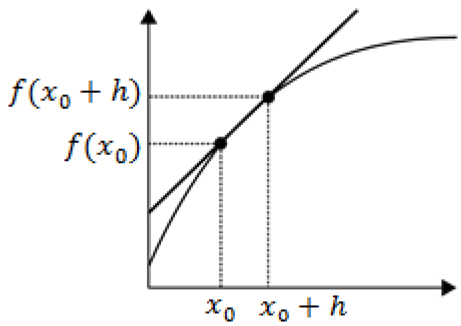
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}. \qquad (1)$$



Přímka je určena dvěma body. Pokud chceme získat rovnici tečny v bodě x_0, zvolíme v jeho okolí bod x_1 a zvolme h tak, že $h = x_1 - x_0$.

Po dosazení do (1) získáme:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (3)$$



Tímto způsobem získáme sečnu grafu. Abychom dostali tečnu, zvolíme h blížící se nule a tímto krokem dostaneme derivaci $f(x)$ v bodě x_0. Matematicky to vyjádříme jako limitu (3)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

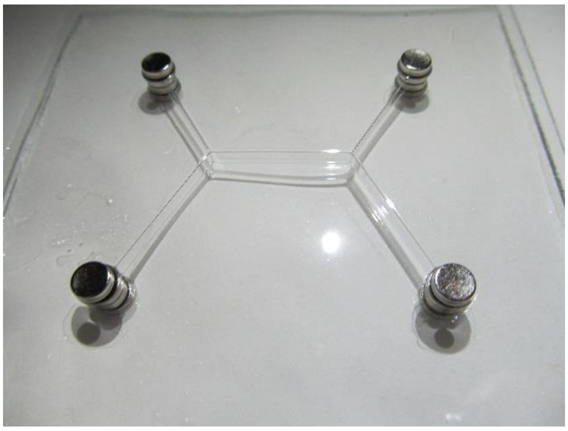
Extrémy funkcí pak hledáme tak, že první derivaci položíme rovnou nule.

3 Povrchové napětí

Povrchové napětí je výsledkem vzájemné interakce přitažlivých sil molekul nebo atomů, z nichž se skládá povrchová vrstva. Povrch kapaliny se chová tak, jako by byl tvořen velmi tenkou pružnou vrstvou, která se snaží při daném objemu kapaliny zaujímat co nejmenší plochu.

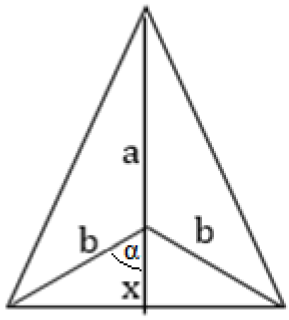
4 Experiment

Sestavili jsme jednoduchou aparaturu ze dvou skleněných destiček spojených magnety tak, že mezi nimi vznikla mezera.



Po ponoření do mýdlové vody se mezi magnety přichytila bublina, která vlivem povrchového napětí zaujala nejmenší možnou plochu. Tímto experimentem se ukázalo řešení našeho problému.

5 Výpočet



Vypočítáme si úhel sevřený těmito třemi spojnicemi bodů v rovnoramenném trojúhelníku, tak aby jejich celková délka byla co nejkratší. Základnu označme jako z a výšku jako v.

$$a = v - \frac{z}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} \qquad b = \frac{z}{2\sin\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{z}{\sin\alpha} + v - \frac{z}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

$$f'(\alpha) = -\frac{z\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{z}{2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\cos^2\alpha}$$

Najdeme extrém funkce tak, že první derivaci položíme rovnou nule.

$$\frac{-2cos\,\alpha + 1}{2\sin^2\alpha} = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

(4) je minimum funkce $f(\alpha)$, z toho plyne, že jednotlivé spojnice mezi sebou svírají úhel 120°. Výjimku tvoří až rovnoramenný trojúhelník, jehož výška je menší než $\frac{z}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}}$.

6 Shrnutí

Po seznámení se s derivacemi jsme v rámci projektu experimentálně zjistili a početně ověřili obecnou zákonitost, která říká, že řešení tohoto problému, a jemu podobných, je složeno z rovných linek, které tvoří určitý počet průsečíků, přičemž každý z průsečíků sestává ze tří linek. Každé dvě sousední linky přitom svírají úhel 120°. Rovněž jsme došli k závěru, že počet průsečíků daného n-úhelníku je součástí intervalu <0; n-2> a patří do oboru celých čísel.

Poděkování

Rádi bychom poděkovali FJFI ČVUT v Praze za organizaci Týdne vědy. Dále bychom chtěli poděkovat našemu supervizorovi Bc. Jakubovi Krásenskému za veškerou výpomoc a spolupráci.

Reference:

[1] Wikipedie, URL: https://cs.wikipedia.org/wiki/Derivace#/media/File:Derivative1.png

[2] Katedra obecné fyziky, URL: http://kof.zcu.cz/vusc/pg/termo09/physics.htm

[3] http://www.arch.mcgill.ca/prof/sijpkes/arch374/winter2001/tal/soapfilm/final.htm