

Derivace a integrály v kinematice

K. Grohmannová¹, K. Haismanová², J. Hůla³, D. Miloschewsky⁴

¹Gymnázium Hejčín-Olomouc, 779 00 Olomouc

²Gymnázium Václava Beneše Třebízského, Slaný, 274 01 Slaný

³Gymnázium Kolín, 280 02 Kolín

⁴Gymnázium Altis, 109 00 Praha 10

¹k.grohmannova@email.cz, ²tyna.haiso@seznam.cz

³pepa.hula@gmail.com, ⁴david@miloschewsky.cz

20. června 2017

Abstrakt

Derivace a integrály jsou důležitým nástrojem matematiky s obrovským využitím i v jiných oborech, nejen v kinematice. Pohyb je nedílnou součástí našeho života a jeho popis je díky derivacím a integrálům snadný. S použitím 2. Newtonova zákona jsme zjišťovali, s jakým zrychlením se různě hmotná tělesa pohybují po vzduchové dráze a zda se naměřené hodnoty shodují s teoretickými výpočty.

1 Úvod

Již Isaac Newton či Gottfried Leibniz se na své vědecké cestě setkali s derivacemi. Od té doby jsou hojně využívaným nástrojem v mnoha odvětvích. Významné využití mají také integrály – operace inverzní k derivacím. Naším cílem bylo blíže se s nimi seznámit na jednoduchých příkladech a poznat jejich význam v kinematických rovnicích.

2 Teoretický základ

V kinematice počítáme se čtyřmi základními veličinami: čas t , poloha x , rychlost v a zrychlení a . Čas je nezávislou veličinou, na které zbylé tři závisí. Poloha, rychlost a zrychlení jsou tedy funkcemi času. Nyní budeme uvažovat rovnoměrně zrychlený pohyb. Okamžité zrychlení v čase t je poté dáno funkcí

$$a(t) = a, \tag{1}$$

kde a je pevné, jedná se tedy o konstantní funkci. Okamžitá rychlost v čase t je dána funkcí

$$v(t) = at + v_0, \tag{2}$$

kde v_0 je počáteční rychlost. Jedná se o lineární funkci a grafem je přímka. Okamžitá poloha v čase t je dána funkcí

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0, \quad (3)$$

kde x_0 je počáteční poloha. Jedná se o kvadratickou funkci, jejíž grafem je parabola.

Mezi těmito veličinami platí následující vztahy. Rychlost je obecně definována jako časová změna polohy. Matematicky zapsáno

$$v(t) = \dot{x}(t), \quad (4)$$

kde tečka značí derivaci podle času. Analogicky, zrychlení je časovou změnou rychlosti, tedy

$$a(t) = \dot{v}(t). \quad (5)$$

Dosazením vztahů (1), (2), (3) do těchto definic lze snadno ověřit, že tyto vztahy obecné definice splňují.

Chceme-li tyto vztahy obrátit, použijeme časovou integraci (značíme symbolem $\int dt$). Platí tedy

$$x(t) = \int v(t) dt \quad \text{a} \quad v(t) = \int a(t) dt. \quad (6)$$

Integrál má obecně význam plochy pod funkcí. Díky tomu můžeme vztahy (2) a (3) odvodit z geometrie. Plocha pod konstantní funkcí (1) je obdélník o rozměru at . To je hledaná rychlost v , k níž je třeba přičíst integrační konstantu v_0 mající význam počáteční rychlosti. Vztah (2) je tímto odvozen.

Plocha pod lineární funkcí (2) je pravoúhlý lichoběžník, který lze rozložit na obdélník o obsahu v_0t a trojúhelník. Tento trojúhelník má odvěsny o délkách t a at . Plocha trojúhelníku je $\frac{1}{2}at^2$. Sečtením obsahů obdélníku a trojúhelníku získáme pozici x , k níž je třeba přičíst integrační konstantu x_0 mající význam počáteční polohy. Vztah (3) je tímto odvozen.

3 Experiment

3.1 Princip

Kinematické zákony v běžném životě nefungují přesně podle vzorců a jedním z důvodů je tření. Chceme-li tedy zkoumat jejich platnost, je potřeba zajistit, aby se těleso pohybovalo bez tření. K tomu slouží například vzduchová dráha, na které jsou vozíky nadnášeny vzduchovým polštářem. Nedochozí zde ke styku ploch a tím pádem ani ke tření.

K vozíku jsme připevnili závaží provázkem visícím přes kladku. Závaží vlivem své hmotnosti padalo směrem k zemi s gravitačním zrychlením g a táhlo za sebou vozík, který vlivem této síly konal rovnoměrně zrychlený pohyb. Pro zrychlení a vozíku z 2. Newtonova zákona platí

$$a = \frac{M_z}{M_v + M_z}g, \quad (7)$$

kde M_z je hmotnost závaží, M_v je hmotnost vozíku a g je tíhové zrychlení. V programu DataStudio [1] jsme měřili polohu vozíku pomocí ultrazvukového senzoru – vozík měl připevněnou odraznou plochu. Zrychlení vozíku jsme měřili pro různé hmotnosti M_z závaží a různé hmotnosti M_v vozíku pomocí proložení naměřených dat parabolou – obr. 1.

3.2 Výsledky

Naměřené hodnoty se nachází v tabulkách 1 a 2.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty závaží. M je hmotnost vozíčku. m_1 je hmotnost prvního a m_2 je hmotnost druhého závaží. m_A je hmotnost prvního, m_B je hmotnost druhého a m_C je hmotnost třetího typu závaží na vozíčku.

M [g]	m_1 [g]	m_2 [g]	m_A [g]	m_B [g]	m_C [g]
210,58	26,86	47,92	74,36	48,38	19,32

Tabulka 2: Naměřené hodnoty zrychlení a hmotnosti. M_z je hmotnost závaží, M_v je celková hmotnost vozíčku, a_{real} je naměřené zrychlení a a_{teo} je teoretická dopočítaná hodnota zrychlení ze vztahu (7). Δa je relativní odchylka naměřené hodnoty od teoretické daná vztahem $(a_{real} - a_{teo})/a_{teo}$.

M_z [g]	M_v [g]	$a_{real} \pm \sigma$ [ms ⁻²]	a_{teo} [ms ⁻²]	Δa [%]
m_1	M	$0,925 \pm 0,010$	1,110	16,71
m_1	$M + 2m_C$	$0,811 \pm 0,012$	0,955	15,09
m_1	$M + 2m_B$	$0,661 \pm 0,007$	0,789	16,24
m_1	$M + 2m_A$	$0,557 \pm 0,001$	0,683	18,35
m_2	M	$1,563 \pm 0,013$	1,819	14,07
m_2	$M + 2m_C$	$1,368 \pm 0,051$	1,583	13,56

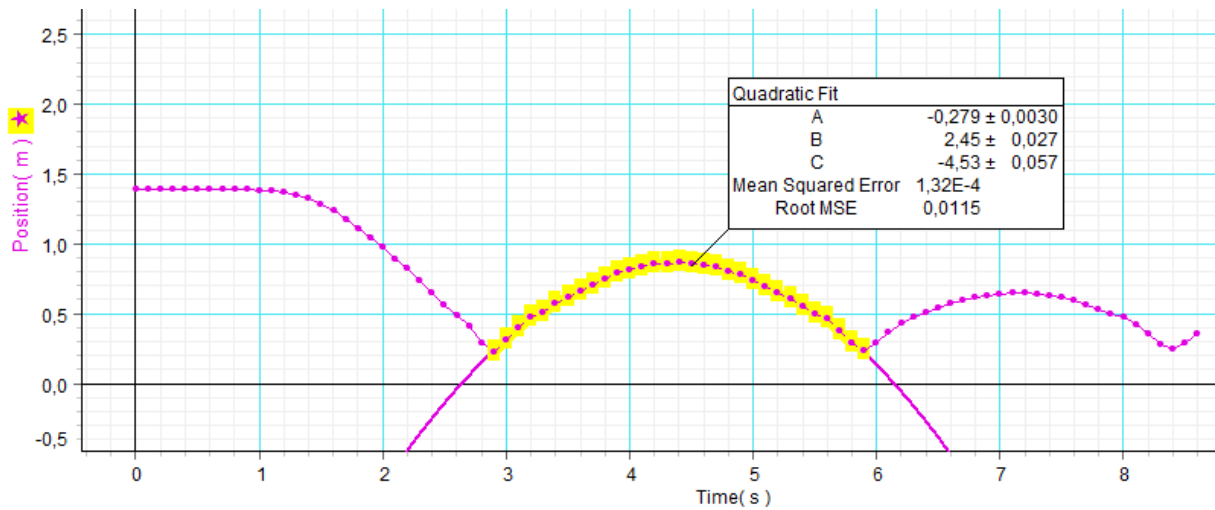
3.3 Diskuze

Po porovnání naměřených hodnot s vypočítanými jsme zjistili, že jejich procentuální rozdíly jsou u všech přibližně stejné – naměřené hodnoty zrychlení byly vždy o přibližně 15 % nižší než vypočítané. Toto porovnání jsme také vynesli do grafu na obr. 2 a proložili přímkou v programu Gnuplot [2]. Z proložení dat lze dojít ke stejnému závěru – reálné hodnoty jsou nižší než předpovězené.

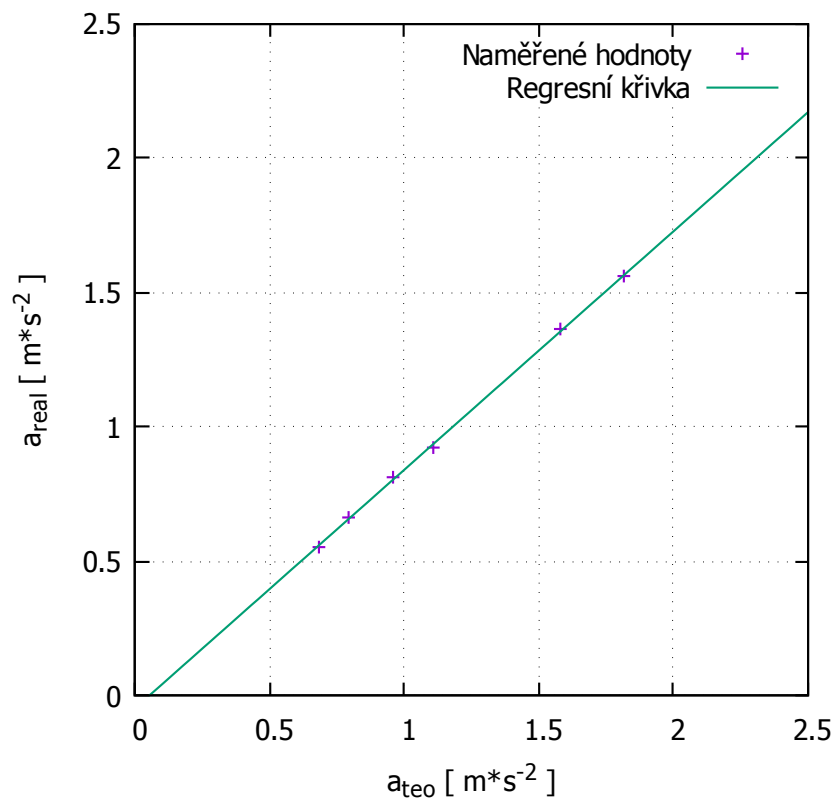
Z toho lze vyvodit, že došlo k systematickým chybám. Jelikož jsme zrychlení měřili v době mezi prvním a druhým odrazem vozíčku od gumičky, je pravděpodobné že vozíček ztratil část svojí energie. Dále jsme při výpočtu nevzali v potaz odpor vzduchu odrazné plochy senzoru. Je také možné, že navzdory nadnášení vzduchem docházelo ke tření a že vzduchová dráha nemusela být přesně vyvážená.

4 Shrnutí

Během vypracovávání projektu jsme se naučili základy derivací a integrálů, odůvodnili si jejich použití v kinematice a následně jsme naše nově nabyté znalosti použili při měření zrychlení vozíčku na vzduchové dráze.



Obrázek 1: Graf časové závislosti polohy vozíčku na vzduchové dráze ($x = x(t)$). Data byla proložena funkcí $f(t) = At^2 + Bt + C$. Porovnáním s funkcí (3) vidíme, že $A = \frac{1}{2}a$, $B = v_0$, $C = x_0$.



Obrázek 2: Graf závislosti naměřeného zrychlení a_{real} (tab. 2) na zrychlení vypočteném ze vztahu (7) Body byly proloženy přímkou $f(x) = 0,886x - 0,0433$. V ideálním případě by závislost byla $f(x) = x$.

Poděkování

Chtěli bychom poděkovat našemu supervizorovi miniprojektu Bc. Zbyňku Nguyenovi za námahu a čas, který nám věnoval. Dále bychom chtěli poděkovat FJFI za uspořádání této akce.

Reference

- [1] *Pasco DataStudio* [Online]. [cit. 20. června 2017]. www.pasco.com/datastudio
- [2] *Gnuplot* [Online]. [cit. 20. června 2017]. www.gnuplot.info/
- [3] Kolektiv KF. *Vzduchová dráha* [Online]. [cit. 20. června 2017]. praktikum.fjfi.cvut.cz/mod/resource/view.php?id=343

Fotogalerie



Obrázek 3: Fotografie vzduchové dráhy s vozíčkem.



Obrázek 4: Fotografie vzduchové dráhy s vozíčkem.