Neceločíselná dimenze
Analýza nevšedních struktur z všedního života

A. Budinská
Gymnázium Františka Švantnera, Nová Baňa; alzbetka17@gmail.com

K. Skybová
Gymnázium Boženy Němcové, Hradec Králové;
kata.skybova@seznam.cz

Abstrakt:

Některé objekty každodenního života se vymykají klasickému pojetí dimenze. Typicky fraktální objekty (např. struktura listu kapradí) lze ovšem charakterizovat zobecněnou dimenzí. V článku se zabýváme jednou z numerických metod, *box-counting,* k odhadu této dimenze různých objektů – obrázků a zvukových signálů.

Pomocí box-counting metody jsme určili dimenzi několika struktur z každodenního života, ať už obrázkových či zvukových a rovněž jsme vytvořili fyzikální model – zašuměný zvukový kanál, který jsme metodou analyzovali. Tyto výsledky jsou unikátní, protože charakterizují šum v takovém systému, a to jednoduchým a neotřelým způsobem.

1 Úvod

Běžně se setkáváme s celočíselnými dimenzemi (D) např. přímka D=1, rovina D=2 atd. Existují i objekty s neceločíselnou dimenzí - např. fraktály. Fraktál je soběpodobná struktura, která může být v přírodě v podobě listu kapradí, korálu a sněhové vločky atd. nebo v matematických modelech např. Sierpinského koberec či Kochova vločka.

K zjišťování dimenze fraktálu používáme numerickou metodu box-counting. Metoda je založená na rozdělení obrázku čtvercovou sítí, kde počet čtverečků překrývajících objekt závisí na hustotě čtvercové sítě. Využijeme ji k zjišťování dimenze různých obrázků fraktálů a zvukových stop.

2 Dimenze

Celočíselné dimenze (D) jsou např. u přímky D=1, roviny D=2, prostoru D=3 atd. Pokud bychom měli úsečku o délce 1j a pravítko o rozměru 1j, 1x by se vešlo na úsečku. Pokud bychom pravítko zmenšili na rozměr 1/2j, vešlo by se na úsečku 2x. Dále bychom pokračovali, až k hraně 1/n potřebovali bychom n pravítek, abychom pokryli úsečku. Podobně můžeme pracovat i s rovinou - měřítko čtverec nebo prostorem - měřítko krychle.

Délka měřítka (Ɛ)	počet potřebných měřítek na pokrytí (N_ε)		
	přímka	rovina	Prostor
1	1	1	1
1/2	2	4	8
1/3	3	9	27
1/n	n	n^2	n^3

Tab. 1 Pokrývání základních objektů elementárním měřítkem

Z tabulky 1 je vidět, že dimenze objektu je v exponentu:

$$N_\varepsilon = \left(\frac{1}{n}\right)^D = \varepsilon^D \tag{1}$$

Pomocí úprav získáme

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D = N_\varepsilon \leftrightarrow D \log\frac{1}{\varepsilon} = \log N_\varepsilon \leftrightarrow D = \frac{\log N_\varepsilon}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \tag{2}$$

Z této myšlenky definujeme obecný vzorec dimenze:

$$D = \lim_{\varepsilon\to 0} \min_{možná\ pokrytí} \left\{\frac{\log N_\varepsilon}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\right\} \tag{3}$$

Limita ve vzorci zohledňuje zjemňování měřítka. Minimum provádíme přes všechna možná pokrytí objektu otevřenými množinami o průměru Ɛ. Toto minimum do definice klademe, abychom objekt pokrývali optimálně.

V praxi jsou samozřejmě i útvary s neceločíselnou dimenzí – např. fraktály. Příkladem je Kochova vločka. Základem je trojúhelník. Každou úsečku rozdělíme na tři části a nad prostřední části vytvoříme rovnostranný trojúhelník bez základny. Tento postup se opakuje nekonečněkrát. Pro volbu $\varepsilon = 1/3^n \rightarrow N_\varepsilon = 4^n$.

$$D = \frac{\log N_\varepsilon}{\log\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} \doteq 1{,}28 \tag{4}$$

3 Box-counting

Box-counting metoda je založená, jak název napovídá na rozdělení obrázku do čtverečků (boxů). Tato metoda pracuje numericky a skutečnou dimenzi pouze aproximuje. Box-counting sestává z následujících kroků:

- Zvolí se n, které dělí rozměr obrázku.
- Vytvoří se čtvercová síť n x n, do jednotlivých buněk se zapíše 0, když buňka přenesená do obrázku nepokrývá zvolený objekt, zapíše se 1, když objekt pokrývá.
- Sečtením čísel v boxech dostáváme počet boxů N, které pokrývají objekt při daném n.
- Do grafu vyneseme bod $[\log n, \log N]$.
- Tyto kroky opakujeme pro různá n, čímž se získá soustava bodů, která se proloží přímkou $f(x) = ax + b$.
- Sklon přímky a je odhadem dimenze objektu.

Skutečně, odlogaritmováním vzorce z definice dimenze (3) dostáváme, že dimenze je poměr mezi veličinou $\log N$ a $\log n$ v limitě $n \to \infty$ (tj. rozměr boxů jde k 0).

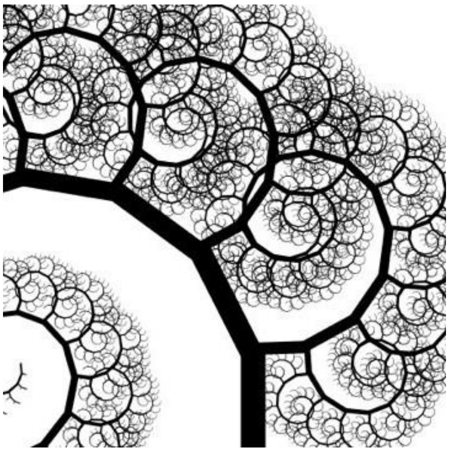
Metoda box-counting se dopouští oproti definici chyby spočívající ve zjednodušení dvou situací: 1) nepokrývá objekt zájmu otevřenými množinami, a to co nejúspornějším způsobem, ale čtverci s určitým uspořádáním; 2) neprovádí limitu $n \to \infty$, ale v nejlepším přiblížení pro n blízké rozlišení obrázku. Velikost této chyby nelze dobře odhadnout, ale její existenci je potřeba mít na zřeteli.

4 Analýza obrázků

Než budeme moct použít metodu box-counting, nejdřív musíme obrázky fraktálů upravit. Obrázek jsme ořízli do čtvercového tvaru s vhodným rozlišením. Poté byl obrázek nahrán do prostředí Matlab, jako trojice obrázků v RGB spektru. Za pomocí vzorečku (5) jsme je převedli z RGB spektra do BW(černobílého) spektra:

$$0{,}21226\,R + 0{,}7152\,G + 0{,}0722\,B \qquad (5)$$

Na každý obrázek použijeme metodu box-counting, která odhadne dimenzi hranice objektů na obrázku. Výsledné odhady pro dva vzory jsou na obrázcích 1,2. Tyto obrázky zjevně vykazují fraktální strukturu, dimenze vychází 2 > D > 1.



Obr. 1 Model rostliny, dim≐1,66

Obr. 2 Motiv kapradí, dim≐1,70

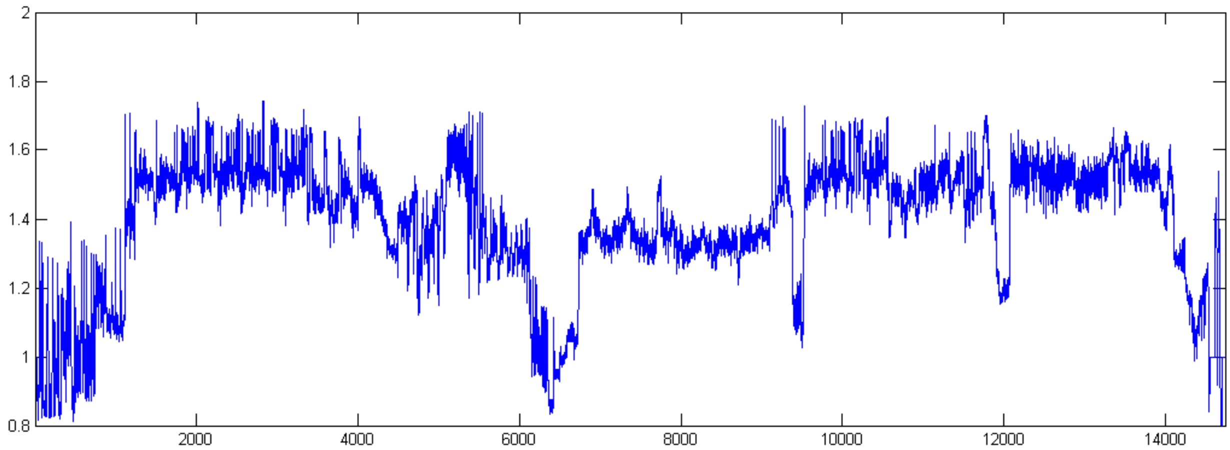
5 Analýza zvuků

K analýze jsou vybrány různé známé zvuky včetně skladeb různých žánrů. Abychom je mohli zpracovat, upravujeme je do podoby obrázků. Ze zvukové stopy vyjmeme kousek o vhodné šířce (o 5040 datech). Tento kousek zakódujeme do nulové matice o rozměru 5040x5040 následujícím způsobem. i-tou hodnotu x_i zaneseme tak, že v i-tém sloupci vepíšeme hodnoty 1 až do y_i-tého řádku, kde

$$y_i = \left\lfloor \frac{5039x_i + 5041}{2} \right\rfloor. \qquad (6)$$

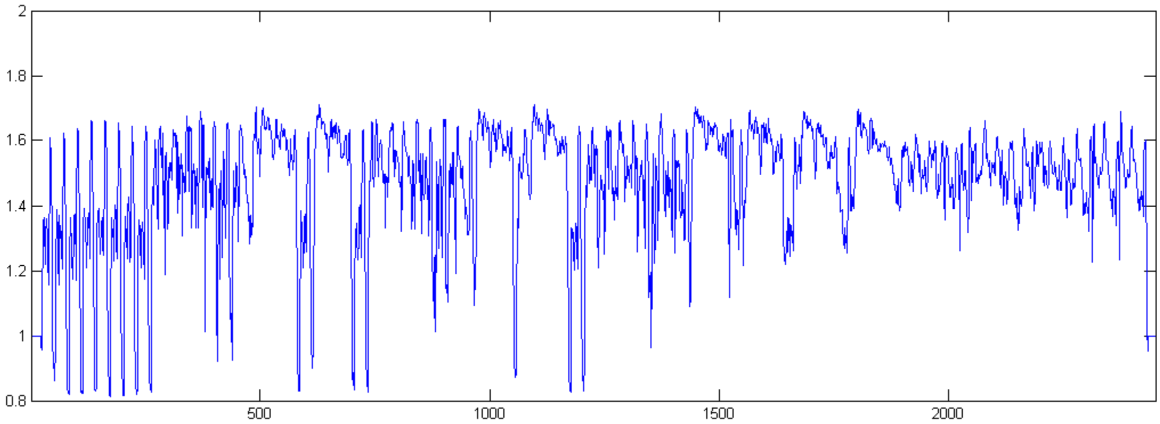
Tato matice ale tvoří černobílý obrázek, na který aplikujeme metodu box-counting, čímž získáme dimenzi vybrané části zvukové stopy. Toto opakujeme v průběhu zvukové stopy.

Dimenze 1 odpovídá čistému zvuku, dimenze 2 odpovídá šumu (náhodnému signálu).



Obr. 3 Změna dimenze zvukové stopy v jejím průběhu – B. Smetana, Vltava (midi)

Z obrázků 3,4 je zřejmé, že se dimenze v průběhu skladby mění, protože se mění hudební nástroje. Zvuk flétny či houslí vykazuje nižší dimenzi, než triangl, lidský hlas či tleskání. To zjevně souvisí s frekvenční charakteristikou nástrojů – flétny generují čisté tóny, zatímco lidský hlas je komplexní zvuk, úder do trianglu vyvolá složitou změť zvuků.

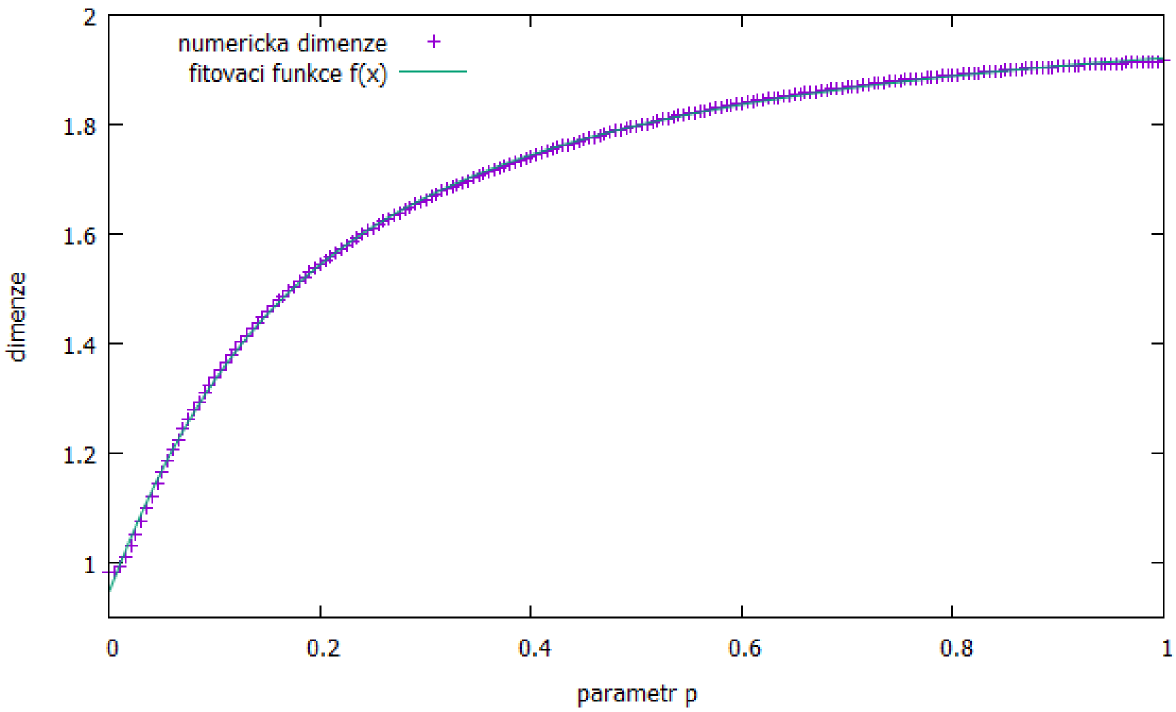


Obr. 4 Změna dimenze zvukové stopy v jejím průběhu – Queen, We Will Rock You

Zkonstruujeme nyní model, který bude simulovat poslouchání zvuku procházejícího šumovým kanálem. Zvuk budeme simulovat křivkou $\sim \sin x$ a šum náhodným signálem $\mathrm{rand}(x)$. Tyto dva signály budeme kombinovat do jednoho signálu $g(x)$:

$$g(x) = (1-p)\sin x + p\ \mathrm{rand}(x) \tag{7}$$

Tento signál zpracujeme pro různé hodnoty parametru p podél deseti period (tj. $x \in \langle 0, 20\pi \rangle$) způsobem analogickým jako výše. Za x volíme 5040 hodnot ekvidistantně rozdělených po intervalu a vytvoříme matici zachycující narušený zvukový signál. Na matici aplikujeme metodu box-counting a získáme pro parametr p hodnotu dimenze, která značí, jak moc je signál narušen (připomínáme, že dimenzi 1 má ideální čistý zvuk, dimenzi 2 má ideální šum). Výsledná data jsou na obrázku 5. Aby byly výsledky srovnatelné, pro všechna p jsme použili stejný šumový signál.



Obr. 5 Závislost dimenze na příměsi šumu.

V případě $p = 1$, tj. signál je tvořen pouze šumem, dala box-counting metoda dimenzi zhruba 1,92. Hodnotě 2 se ovšem lze pouze přiblížit, jednak díky tomu, že metoda samotná je zatížena chybou, a také proto, že námi vytvořený šum není ideální, za aproximaci je zodpovědný přechod od signálu $g(x)$ k diskrétní množině dat.

Data byla proložena funkcí $f(x) = a\arctan(bx + c) + d$, která odpovídá velmi dobře vypočtené závislosti (jak se lze přesvědčit z obrázku 5); nalezené parametry jsou

Parametr	Hodnota	Stř. kvadr. odchylka
a	1,0034	±0,0284
b	6,2258	±0,0877
c	0,4875	±0,0349
d	0,4937	±0,0426

Šum tedy přispívá k dimenzi zvukové stopy prostřednictvím funkce arctan.

6 Shrnutí

Cílem naší práce bylo zjistit, jakou dimenzi mají věci z našeho života, které mají nevšední strukturu. Pracovali jsme s obrázky fraktálů, konkrétně s modelem listu kapradiny a modelem rostliny a též jsme pracovali se zvukovými stopami, např. skladbou Vltava.

Na obrázky jsme po úpravě použili metodu box-counting, což je numerická metoda odhadující dimenzi objektu. Zvukové stopy jsme trikem převedli na obrázky, které jsme rovněž zpracovali metodou box-counting.

Z těchto analýz jsme zjistili, že útvary v přírodě, např. obrys listu kapradí skutečně má fraktální strukturu, neboť mají dimenzi 2>dim>1. Záznamy skladeb mají dimenzi zhruba 1,5, což ukazuje na komplexní strukturu, která ovšem má daleko do chaotického šumu. Dimenze se v průběhu skladby měnila podle použitých nástrojů, např. je zřetelný rozdíl mezi flétnami a trianglem, či tleskáním. Ze zvukových stop měl nejvyšší dimenzi záznam projíždějících aut, který co do dimenze odpovídal téměř dokonale samotnému šumu.

Námi vytvořený model zvukového kanálu odhalil závislost dimenze na přítomnosti šumu ve tvaru funkce arctan.

Poděkování

Děkujeme vedoucímu Ing. Martinu Malachovi za pomoc s miniprojektem, poskytnutí vědomostí a důležitých rad. Dále bychom chtěli poděkovat fakultě FJFI za zorganizování a uspořádání akce Týden vědy na jaderce a katedře matematiky FJFI za poskytnutí prostorů a materiálu pro náš miniprojekt.

Reference:

[1] Obrázky staženy z domén http://hrymodelyasituace.blogspot.cz/2010/12/fraktaly.html, http://matthewjamestaylor.com/blog/create-fractals-with-recursive-drawing dne 16.5.2017

[2] Hudební stopa Queen –We Will Rock You stažena z YouTube

[3]Bouda M., Caplan J. S., Saiers J. E., *Box-Counting Dimension Revisited: Presenting an Efficient Method of Minimizing Quantization Error and an Assessment of the Self-Similarity of Structural Root Systems*, Front Plant Sci., 2016, 7 **49**

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Box_counting

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_dimension

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Grayscale