

Rostou racionální čísla na stromech?

Monika Drexlerová
Maxmilián Ladislav Skuda
Lukáš Létal

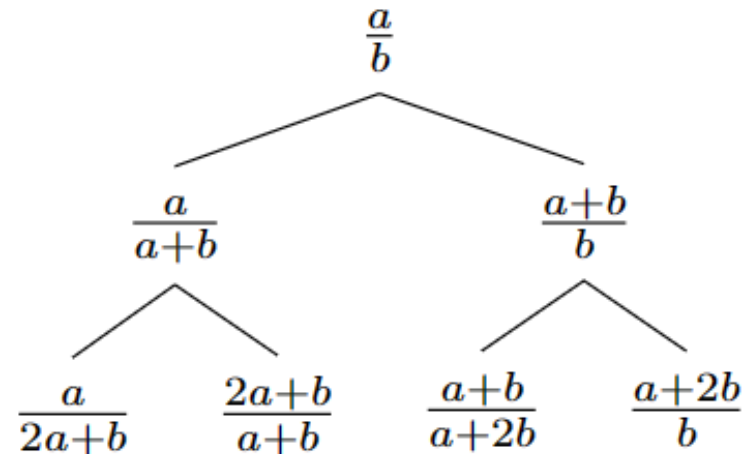
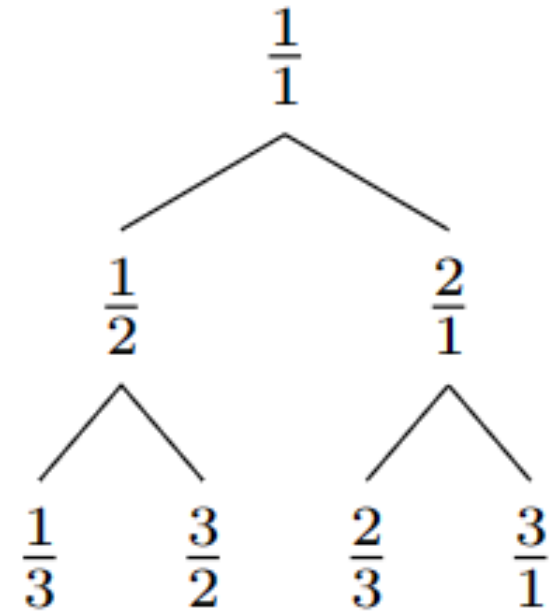
Garant: Veronika Hendrychová

Historie vzniku

Calkin-Wilfův strom

- Vznikl v 2. polovině 20. století
- Pouze polovina (kladná)-záporná jsou stejná akorát s mínus
- Harmonie světa 1619 (J. Kepler)

$$\frac{a}{b} \rightarrow \frac{a}{b+a}, \frac{a+b}{b}$$



Důkazy

1. Důkaz, že jsou všechny prvky jiné (problém s krácením)

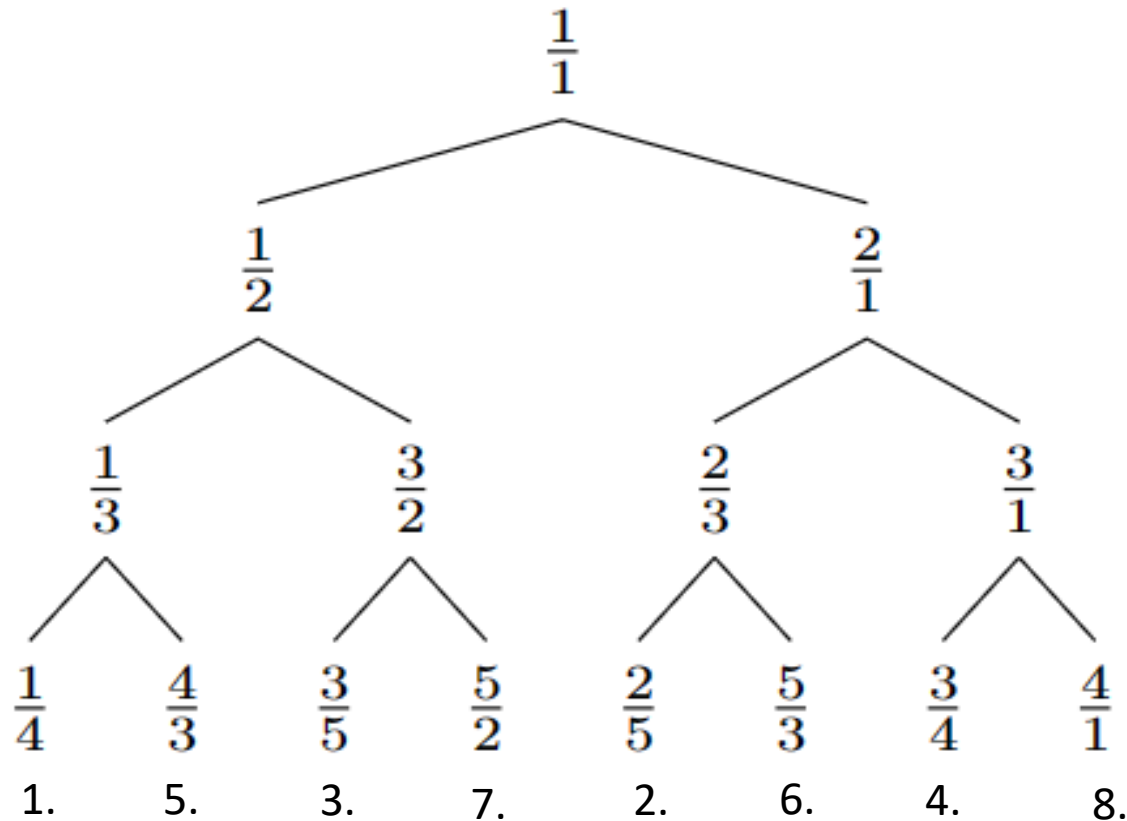
- První člen: $\frac{1}{1}$
- Princip vzniku dalších: $\frac{a+b}{b}$
- Musí platit: $a + b \neq a \neq b$
- Absence nulového prvku

2. Důkaz, že obsahuje všechna racionální čísla

- Libovolné $\frac{r}{s}$, $r + s \geq 2$
- Pro $r > s$ je rodič $\frac{r-s}{s}$
- Pro $s > r$ je rodič $\frac{r}{s-r}$
- Indukce

Co vyplývá ze C-W stromu?

Jak seřadit podle velikosti čísla v řádku



1.	L	L	L
2.	P	L	L
3.	L	P	L
4.	P	P	L
5.	L	L	P
6.	P	L	P
7.	L	P	P
8.	P	P	P

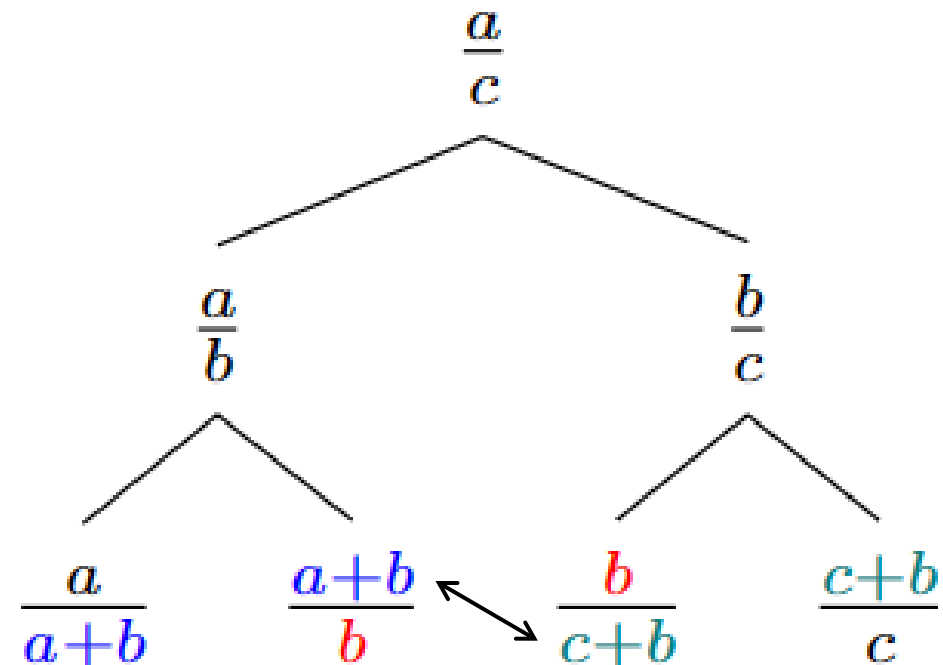
Co vyplývá ze C-W stromu?

Návaznost čitatele a jmenovatele v rámci řady

- Ve větvi – algoritmus vzniku
- Mezi větvemi:

* Důkaz, že na středu platí i do kříže

* $b + c = a + b, a = c = 1$

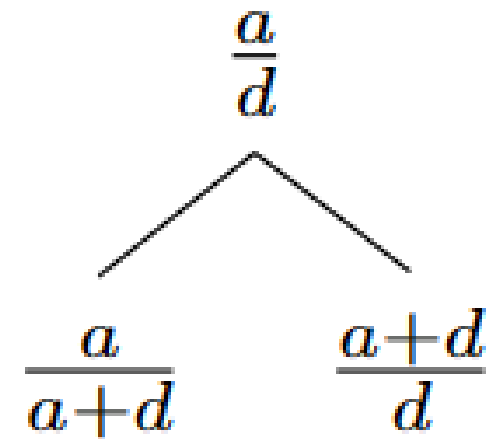
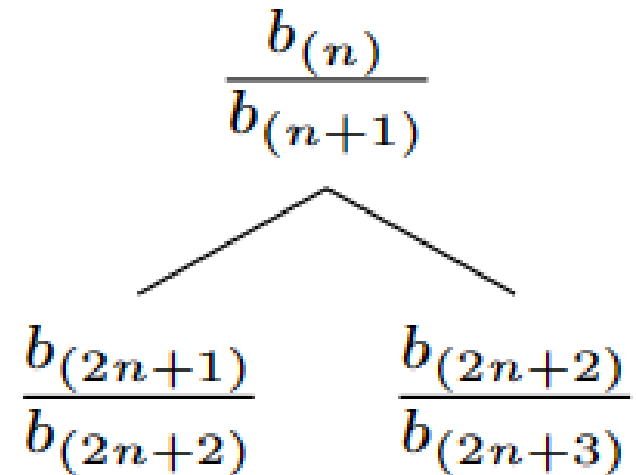


Co vyplývá ze C-W stromu?

Sternova diatomická posloupnost $b_{(n)}$

- Čitatele z každého zlomku (jmenovatele posunutí)
- Lze ji sestavit podle základních rovnic, které ze stromu vyplývají:

$$\begin{aligned}b_{(n)} + b_{(n+1)} &= b_{(2n+2)} \\ b_{(n)} &= b_{(2n+1)}, b_{(n+1)} = b_{(2n+3)} \\ b_{(2n+1)} + b_{(2n+3)} &= b_{(2n+2)}\end{aligned}$$



Co vyplývá ze C-W stromu?

Sternova diatomická posloupnost $b_{(n)}$

- Stejně posloupnosti odpovídá pro n -tý člen, počet jeho rozkladů na součty mocnin 2, právě tak, že každá mocnina 2 je v zápisu pouze 2x.

$$n=13$$

$$b_{(n)}=3$$

$$13=2^3 + 2^2 + 2^0$$

$$13= 2^3 + 2^1 + 2^1 + 2^0$$

$$13= 2^2 + 2^2 + 2^1 + 2^1 + 2^0$$

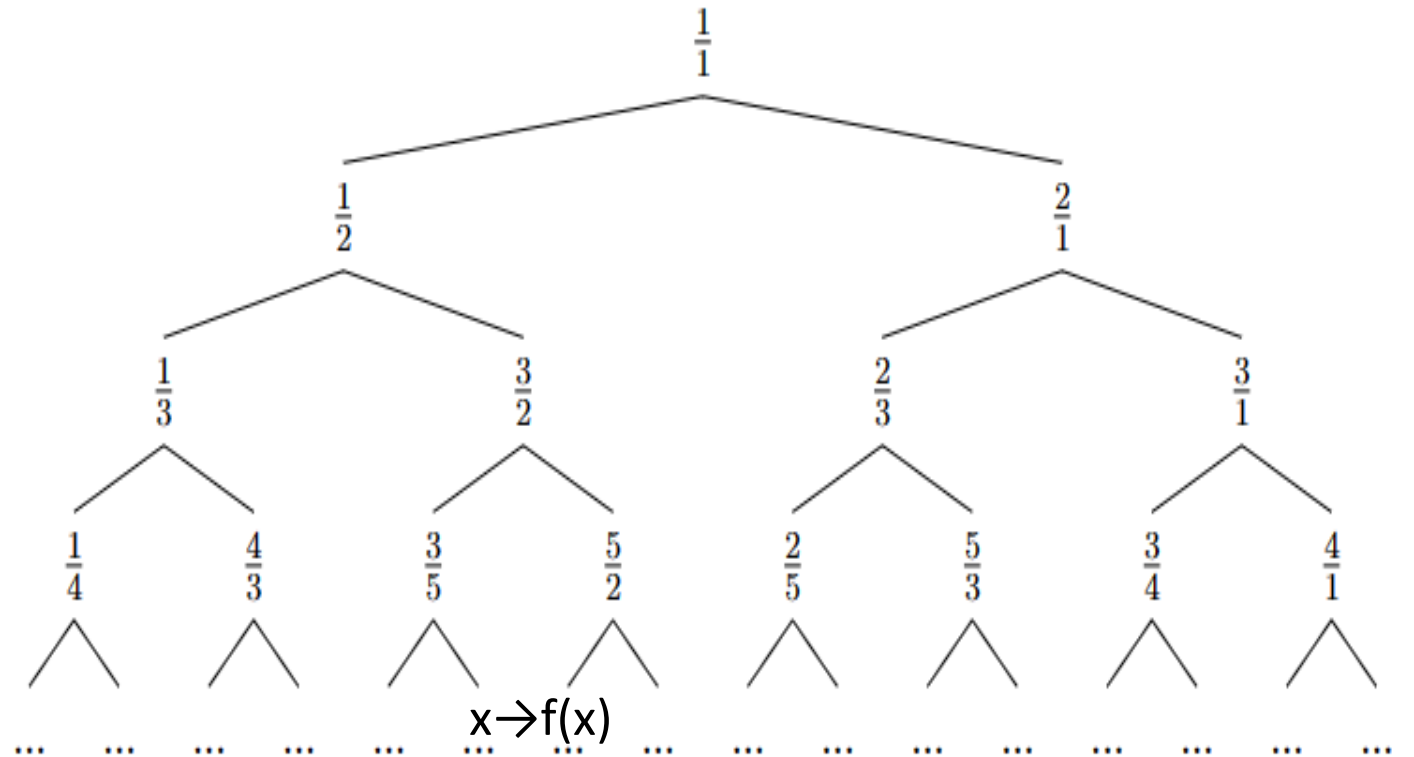
$$b_{(n)} = b_{(2n+1)}, b_{(6)} = b_{(13)}$$

Co vyplývá ze C-W stromu?

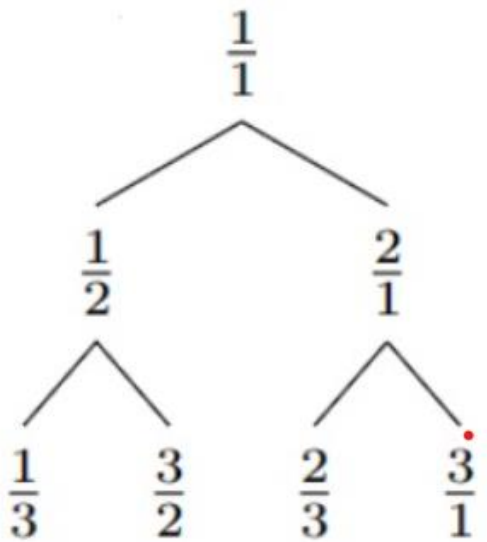
Následující zlomek

- x =zlomek
- Funkce $f(x)$, která nám dá následující zlomek
- $[x]$ = dolní celé číslo
- $\{x\}$ = zlomková část

$$f(x) = \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}}$$



Děkujeme za pozornost

CW STROM:	WC STROM:
 <pre>graph TD; N1["1/1"] --- N2["1/2"]; N1 --- N3["2/1"]; N2 --- N4["1/3"]; N2 --- N5["3/2"]; N3 --- N6["2/3"]; N3 --- N7["3/1"]; style N7 fill:none,stroke:none; style N7 stroke:red,stroke-width:2px; style N7 stroke-dasharray: 5 5;</pre>	