

Jak chladne vesmír aneb Pečení sférického krocana

T. Kyselová, J. Novák, P. Sluka

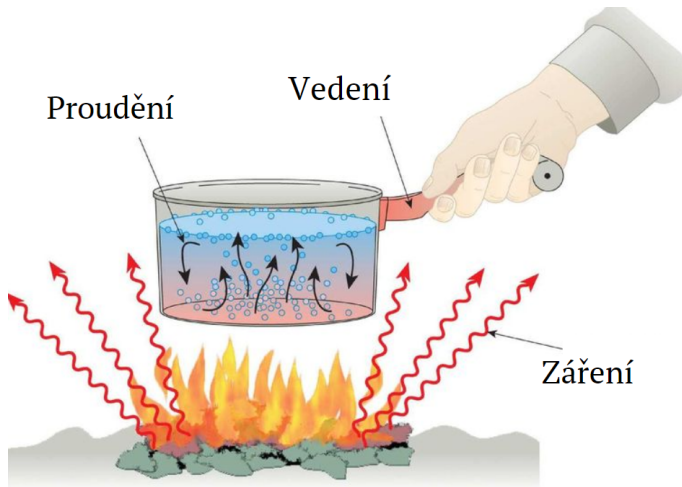
FJFI ČVUT, Břehová 78/7

21. června 2023

- 1 Úvod
 - Šíření tepla
 - Rovnice vedení tepla
- 2 Pečení sférického krocana
 - Panofskyho vzorec
 - Škálovací symetrie
 - Analytické řešení
 - Výsledky 1. aproximační funkce
- 3 Závěr

Úvod

Šíření tepla



Úvod

Rovnice vedení tepla

- nacházíme se v homogenním isotropním prostředí
- tepelná vodivost, měrná tepelná kapacita a objemová hustota
→ konstantní

Rovnice vedení tepla

$$\frac{\lambda}{c\rho} \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{c\rho} = 0, \quad (1)$$

Rovnice vedení tepla pro sférickou symetrii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad k = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (2)$$

- 1 Úvod
 - Šíření tepla
 - Rovnice vedení tepla
- 2 Pečení sférického krocana
 - Panofskyho vzorec
 - Škálovací symetrie
 - Analytické řešení
 - Výsledky 1. aproximační funkce
- 3 Závěr

Pečení sférického krocana

Panofskyho vzorec

Panofskyho vzorec

$$t_P = \frac{M^{\frac{2}{3}}}{P_e}, \quad (3)$$

Panofskyho konstanta

$$P_e = 1,5 \text{ lb}^{\frac{2}{3}} \cdot \text{h}^{-1} = 0,88 \text{ kg}^{\frac{2}{3}} \cdot \text{h}^{-1}. \quad (4)$$

Pečení sférického krocana

Škálovací symetrie

Škálovací symetrie

$$(r, t) \mapsto (s, \tau) = (ar, bt), \quad (5)$$

Rovnice je pro $b = a^2$ je rovnice invariantní

Definice P_f

$$\frac{M_1^{\frac{2}{3}}}{t_1} = \frac{M_2^{\frac{2}{3}}}{t_2} =: P, \quad (6)$$

Pečení sférického krocana

Analytické řešení

Řešení ve tvaru nekonečné funkční řady

$$u(r, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N(r, t) \quad (7)$$

v rámci N -té aproximační funkce

$$u_N(r, t) = u_R + \frac{2R(u_0 - u_R)}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{\sin \frac{n\pi r}{R}}{r} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 k}{R^2} t\right) \quad (8)$$

$N \in \mathbb{N}.$

Pečení sférického krocana

Výsledky 1. aproximační funkce

1. aproximační funkce

$$u_1(r, t) = u_R + \frac{2R(u_0 - u_R)}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi r}{R}}{r} \exp\left(-\frac{\pi^2 k}{R^2} t\right) \quad (9)$$

Explicitní vyjádření finální doby pečení

$$t_f = \alpha \ln \frac{2\beta(u_R - u_0)}{u_R - u_f}, \quad \alpha = \frac{R^2}{\pi^2 k}, \quad \beta = \frac{\sin \frac{\pi r_f}{R}}{\frac{\pi r_f}{R}}, \quad k = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (10)$$

Pečení sférického krocana

Výsledky 1. aproximační funkce

Teoretická predikce pro Panofskyho konstantu

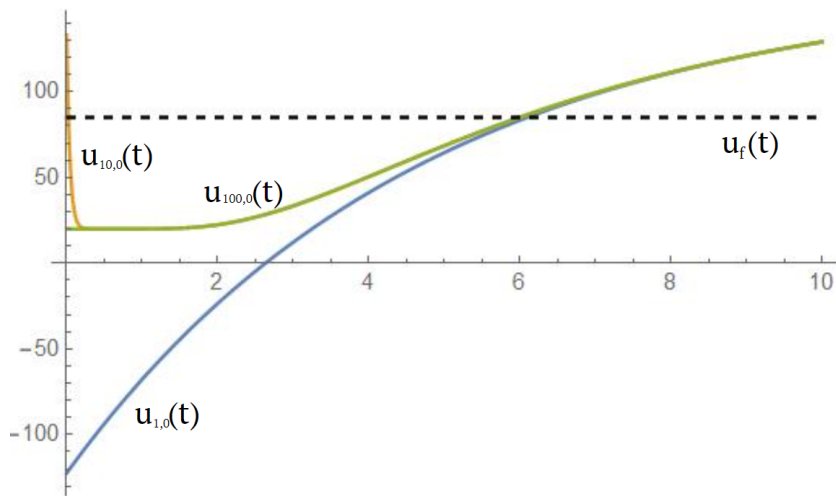
$$P = \frac{M^{\frac{2}{3}}}{t_f} = \frac{\lambda}{c} \left(\frac{16\pi^8}{9\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\ln \frac{2\beta(u_R - u_0)}{u_R - u_f}}, \quad \beta = \frac{\sin \frac{\pi r_f}{R}}{\frac{\pi r_f}{R}}. \quad (11)$$

Pro $r_f = 0$ je limitně $\beta = 1$

$$P_2 = \frac{\lambda}{c} \left(\frac{16\pi^8}{9\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\ln \frac{2(u_R - u_0)}{u_R - u_f}} = 0.99 \text{ kg}^{\frac{2}{3}} \cdot \text{h}^{-1} \neq 0.68 \text{ kg}^{\frac{2}{3}} \cdot \text{h}^{-1} \quad (12)$$

- 1 Úvod
 - Šíření tepla
 - Rovnice vedení tepla
- 2 Pečení sférického krocana
 - Panofskyho vzorec
 - Škálovací symetrie
 - Analytické řešení
 - Výsledky 1. aproximační funkce
- 3 Závěr

Závěr






Obrázek 1: Graf aproximačních funkcí pro $N \in \{1; 10; 100\}$



Optimální doba pečení

$$t_f = 6 \text{ h}$$

Reference

-  R. L. Herman. *Baking a Spherical Turkey*. [online]
-  Y. Jin, L. R. Wang, and J. J. Wang. *Physics in turkey cooking: Revisit the Panofsky formula*. [online]
-  Wikipedia. Imperial units. [online]

Děkujeme za pozornost